

1	2	3	4	5	6	7	Всего
НИЧЕГО НЕ ПИШЕМ ЗДЕСЬ							
НИЧЕГО НЕ ПИШЕМ ЗДЕСЬ							



Фамилия _____ Имя _____

Класс _____ Школа _____

4 класс

№ _____

Бланк участника Санкт-Петербургской математической олимпиады 2016

Памятка участника: ● задачи можно решать в любом порядке ● писать нужно ручкой, зачеркивать и исправлять можно, главное – чтобы написанное было понятно ● если сомневаетесь в ответе и решении, но других нет, все равно запишите ● когда требуется только ответ, пояснения давать не надо ● когда требуется объяснение, постарайтесь его записать – это даст больше баллов ● если места на бланке не хватает, пишите на дополнительном листе ● дополнительный лист можно попросить у преподавателя в аудитории ● напишите номера задач около каждого решения на дополнительном листе ● если задача не получается, не сидите над ней слишком долго ● проверьте свои ответы, подставив их в условие ● ВСЕМ УДАЧИ !

1. Решите числовой ребус: $BA \cdot B \cdot A = AAA$. (Одинаковые буквы замените одинаковыми цифрами, а разные – разными).

Ответ: $37 \cdot 3 \cdot 7 = 777$

Решение: заметим, что обе части равенства можно разделить на A , получим $BA \cdot B = 111$. Но число 111 раскладывается на множители единственным способом: $37 \cdot 3 = 111$. Что и дает единственный ответ.



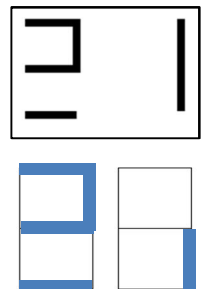
2. У Коли есть карандаш и фанерный прямоугольник со сторонами 3 см и 5 см. Используя этот прямоугольник и карандаш, Коля нарисовал чертёж, на котором есть квадрат со стороной 1 см. Приведите пример такого чертежа. (Разрешается только прикладывать прямоугольник к бумаге и обводить его карандашом.)

Решение: например, порядок рисования такой – горизонтально, затем от правого верхнего угла вертикально, затем от нижнего правого угла горизонтально влево, и от нижнего левого угла вертикально. В центре получен искомый квадрат 1×1 (там, где x).



3. Новые светофоры показывают обратный отсчёт времени – сколько секунд осталось до переключения сигнала. Цифры на светофоре должны выглядеть так:

Но некоторые лампочки на табло перегорели, 1234567890
и в течение пяти секунд светофор показывал такую картинку. Что покажет светофор в следующую секунду, и сколько секунд осталось до смены сигнала с этого момента?



Ответ: 26 или 86 секунд.

Решение: для младшего разряда подходят цифры 0, 1, 3, 4, 7, 8, 9. Но так, чтобы числа шли подряд в младшем разряде, подходят только цифры 1, 0, 9, 8, 7 (и тогда на следующей секунде ожидаем цифру 6). Отсюда становится ясно, что необходим переход старшего разряда. В старшем разряде подходят пары цифр 2 и 3, 8 и 9. Получаем два подходящих ответа – 26 или 86 секунд.

4. Магическим квадратом называется таблица 3x3, в котором суммы чисел в каждой строке, в каждом столбце и на обеих диагоналях равны. Гоша начал рисовать такой магический квадрат. Помогите ему расставить остальные числа.
5. На острове живут только рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы врут в каждой фразе. Путешественник спросил четырех островитян, когда будет закат солнца и получил такие ответы.

8	7	3
1	6	11
9	5	4

1-й сказал: "Закат в 8 вечера. Верь мне, все мы рыцари!".

2-й сказал: "Через час будет 7 часов вечера. Да только все мы лжецы".

3-й сказал: "Закат будет через час. Но только двое из нас рыцари".

4-й сказал: "Сейчас 5 часов вечера. Из всех, кто говорил до меня только один рыцарь".

Сможет ли путник понять, когда закат, и сколько сейчас времени?

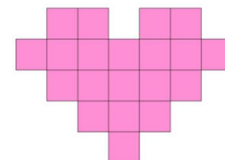
Ответ: сейчас 5 часов вечера, закат в 6 часов вечера.

Решение: 2-й не может быть рыцарем, поскольку его вторая фраза («все мы лжецы») утверждала бы обратное. Значит, 2-й лжец и, поскольку он лжет, то не все они лжецы.

Тогда 1-й тоже лжец, поскольку он говорит ложную фразу – «все мы рыцари». Если бы 4-й был лжецом, то и 3-й был бы лжецом, поскольку тогда двух рыцарей нет. Но все четверо, как мы выяснили, не могут быть лжецами. Т.е. 4-й не может быть лжецом и, значит, он рыцарь. Тогда и 3-й является рыцарем, и противоречия в высказываниях нет. Отсюда получаем ответ.



6. Четверо друзей принесли одной Тане на день святого Валентина большой торт, как на рисунке. Чтобы никого не обидеть, Таня решила его разрезать по сторонам клеточек на пять частей, одинаковых по размеру, но разных по форме (никакие две части не совпадают при наложении или отражении). Сможет ли она это сделать? Объясните свой ответ.



Ответ: не сможет.

Решение 1: всего есть 20 клеток и, значит, каждый кусочек будет $20:5 = 4$ клеточки. Из 4 клеточек можно собрать такие РАЗНЫЕ фигурки: прямая, квадрат, буква «Г», буква «Т», буква «Z» и их всего 5 штук. Т.е. придется использовать каждую из них по одному разу. Заметим, что квадратик 2x2 никуда не удастся поставить: есть всего 8 вариантов его расстановки (4 и еще 4 симметрично) и в каждом варианте квадратик «отрезает» 1 или 5 клеток с краю и туда уже нельзя поставить никакую из оставшихся фигур. Т.о. разрезать торт нельзя.

Решение 2: Заметим, что всего существует пять различных тетрамино. Раскрасим доску в шахматном порядке. Тогда у всех фигурок, кроме Т-шки, две белых и две чёрных клетки. А у Т-шки – три белых и одна чёрная (или наоборот). Значит, всего 9 или 11 белых клеток. Однако в самом «сердце» 8 или 12 белых клеток. Противоречие.

7. Десять ладей расставлены на доске 10x10 так, что никакие две не бьют друг друга. За один ход разрешается выбрать любую пару ладей и передвинуть каждую из них на одну клетку по горизонтали, или каждую из них на одну клетку по вертикали. Можно ли за несколько таких ходов поставить все ладьи в один ряд (на одну горизонталь или на одну вертикаль)? Приведите порядок ходов, если этого можно добиться, или объясните, почему нельзя.



Ответ: нельзя.

Решение: рассмотрим сначала, можно ли собрать все ладьи на какой-то горизонтали. Присвоим каждой ладье номер горизонтали, на которой она стоит. Это числа 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10, поскольку на каждой горизонтали стоит ровно одна ладья. Тогда сумма их номеров $1+2+3+\dots+10 = 55$. Как может меняться эта сумма после какого-то хода? Ходы вдоль горизонтали не меняют ее, поскольку каждая ладья остается на прежней горизонтали. Если две ладьи двигают вниз, то сумма уменьшается на 2, если вверх, то увеличивается на 2. Если одна ладья вверх, а другая – вниз, то сумма не меняется. Получаем, что сумма ходов всегда меняется на 2 или 0 и, значит, всегда остается нечетной, поскольку 55 нечетно. Если бы удалось собрать все ладьи на одной горизонтали, то сумма их номеров была бы $10x$, где x – номер горизонтали. Поскольку это четное число, то получить его невозможно для любой горизонтали. Аналогично рассуждая, мы докажем, что для любой вертикали это также невозможно.