XI Санкт-Петербургская математическая олимпиада
2024–2025 учебный год

1 класс

Решения задач отборочного тура

Задача 1. Дети испачкали руки в чёрной краске. Каждый ребёнок оставил два отпечатка рук на листе бумаги. Сколько всего было детей?

Решение. Посчитаем отпечатки рук. Их 10. Каждый ребёнок оставил 2 отпечатка. Значит, детей 5.

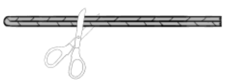
5

Задача 2. У Саши 3 карандаша разных цветов и длины. Красный не длиннее других, а синий короче зелёного. Какой карандаш самый длинный?

Решение. Так как все карандаши разной длины, и красный не длиннее других, то он не самый длинный. Синий короче зелёного, значит, самый длинный зелёный.

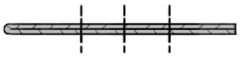
Зелёный

Задача 3. Верёвку сначала сложили пополам, а потом перерезали ножницами в трёх местах, причём резали не на концах. Сколько кусочков верёвки получилось?



Решение. Если сложить верёвку и разрезать её три раза, получится 7 кусочков.

7

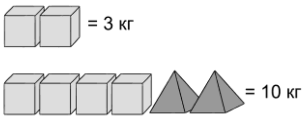


Задача 4. Одного из трёх братьев, изображённых на картинке, зовут Петя. Определите, какого именно, если известно, что два из них вруны, и лишь один говорит правду. В ответ запишите номер, указанный под изображением мальчика.

Решение. Второй и третий мальчики либо оба говорят правду, либо оба лгут. Так как правду говорит только один из братьев, то 2 и 3 – вруны, а первый говорит правду. Значит, он Петя.

1

Задача 5. У Саши есть одинаковые кубы и одинаковые пирамидки. 2 куба вместе весят 3 кг, а 4 куба и 2 пирамидки вместе – 10 кг (см. рисунок). Сколько килограммов весит одна пирамидка?



Решение. Если 2 куба весят 3 кг, то 4 куба весят $3+3=6$ кг. Значит, 2 пирамидки весят $10-6=$ $=4$ кг. Тогда каждая пирамидка весит 2 кг.

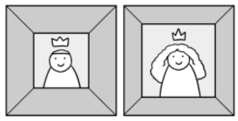
2

Задача 6. Мама разрезала арбуз на несколько частей и велела Пете разложить куски на две тарелки поровну. Один кусок оказался лишним, и Петя съел его. И тут вдруг выяснилось, что надо разложить не на две, а на три тарелки. Петя разложил куски по трём тарелкам поровну, и теперь у него два куска остались лишними. Петя их тоже съел. На сколько кусков мама разрезала арбуз, если Петя съел больше кусков, чем оказалось на каждой тарелке?

9

Решение. Петя съел 3 куска. Значит, на тарелках было либо по 1, либо по 2 куска. Проверим оба варианта. Если на трёх тарелках по 1 куску, то до того, как Петя съел 2, их было 5. Но это число нечётное, значит так быть не могло, ведь по условию Петя мог разложить куски по двум тарелкам. Если на трёх тарелках по 2 куска, то до того, как Петя съел 2, их было 8. Это чётное число кусков, которое можно было разложить на две тарелки. Так как по условию до этого Петя съел ещё кусок, то изначально их было 9.

Задача 7. Художник нарисовал квадратные портреты королевы и короля. Портрет королевы (без рамы) имеет высоту 10 метров, а портрет короля – 6 метров. Ширина рамы портрета королевы 1 метр. Какой ширины должна быть рама для портрета короля, чтобы портреты с рамами получились одной высоты?



Решение. Высота портрета королевы с рамой $10+1+1=12$ метров. Значит, высота портрета короля с рамой тоже должна быть 12 метров. Портрет короля – 6 метров, тогда рама должна на $12-6=$ $=6$ метров увеличить портрет короля, то есть по 3 метра с каждой стороны.

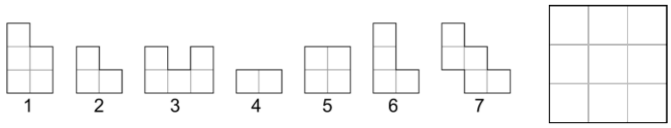
3

Задача 8. Маленький Вова прыгает, когда видит кота, и хлопает, когда видит собаку. Однако сегодня Вова один раз по ошибке вместо того, чтобы хлопнуть, прыгнул при виде собаки и один раз вместо того, чтобы прыгнуть, хлопнул при виде кота. Сколько котов сегодня увидел Вова, если он хлопнул три раза, а всего животных было восемь?

Решение. Вова хлопнул три раза, при этом один из этих хлопков был вызван появлением кота, то есть, был лишним. Зато один раз он пропустил, когда нужно было хлопнуть при виде собаки. Значит, собак было действительно три, а котов $8-3=5$.

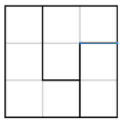
5

Задача 9. Есть несколько фигур. Выберите из них ровно три разные фигуры так, чтобы из них можно было сложить квадрат 3×3. Фигуры можно поворачивать и переворачивать, но нельзя класть друг на друга. В ответ запишите номера выбранных фигур слева направо по порядку.



Решение. В квадрате 3×3 ровно 9 клеток. Значит, нам нужно выбрать 3 фигуры, в которых в сумме будет 9 клеток. Если взять 3 самые маленькие фигуры по 2, 3 и 4 клетки, в них в сумме 9 клеток. Если взять фигуры больше, то в них будет больше 9 клеток, и они нам не подойдут. Три самые маленькие фигуры – это либо фигуры 2, 4, и 5, либо фигуры 2, 4, и 6. Из фигур 2, 4, и 5 квадрат 3×3 собрать нельзя. Значит, остаётся один подходящий ответ – 2, 4, и 6 (см. рис.).

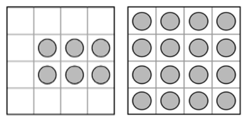
2, 4, 6



Задача 10. В каждой клетке квадратной доски стояла шашка. Сначала Маша убрала все шашки из верхней строки и левого столбца. Потом пришёл Паша и убрал все шашки из нижней строки. На доске осталось 6 шашек. Сколько шашек было на доске в начале?

Решение. У квадрата количество строк и столбцов было одинаковым. Дети сняли две строки и один столбец, значит, теперь столбцов на 1 больше, чем строк. Из 6 шашек может получиться либо прямоугольник 1×6, либо прямоугольник 2×3. Нам нужен тот, в котором количество строк и столбцов отличается на 1, то есть прямоугольник 2×3. Добавив к прямоугольнику 2×3 обратно две строки и столбец, получим квадрат 4×4, в нём 16 шашек.

16



XI Санкт-Петербургская математическая олимпиада
2024–2025 учебный год

2 класс

Решения задач отборочного тура

Задача 1.

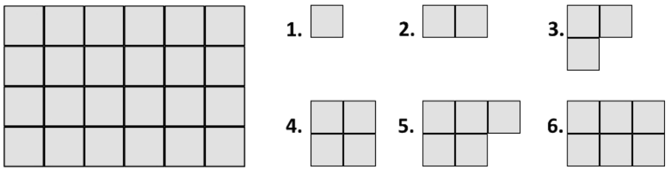
Мы у кошек и сорóк
Насчитали десять ног.
Крыльев было ровно шесть,
Как бы кошек нам учесть?

Посчитайте, сколько было кошек. Считайте, что у кошек и сорóк – «ноги».

Решение. У сорóк 6 крыльев, значит их 3, значит у них 6 ног. Остаются 4 ноги для кошек – это 1 кошка.

$\boxed{1}$

Задача 2. Прямоугольник 6×4 клеток хотят замостить одинаковыми фигурками. Фигурки с каким номером НЕ подойдут для этого?



Примечание. «Замостить» значит покрыть без наложений и без дырок такими фигурками.

Решение. Для всех фигурок, кроме №5, можно привести примеры. Фигурка №5 не подойдёт, поскольку в прямоугольнике $6 \cdot 4 = 24$ клетки, и их нельзя разбить по 5 клеток (24 не делится на 5).

$\boxed{5}$

Задача 3. Коля «считает» на калькуляторе по таким правилам:

А) Если число оканчивается на 4, то прибавляет 9.
Б) Если число оканчивается на 0, 2, 6 или 8, то прибавляет 3.
В) Если число оканчивается на 1, 3, 5, 7 или 9, то вычитает 5.

Коля начал «считать» с числа 10. Какое число он получит после седьмой операции?

$\boxed{13}$

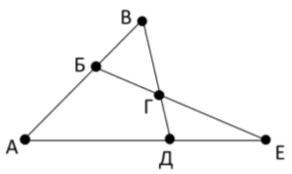
Решение. $10 \to 13 \to 8 \to 11 \to 6 \to 9 \to 4 \to 13$.

Задача 4. Маша нарисовала в ряд 18 животных – собак, кошек и мышек. Кошек всего 5. После каждой кошки сидит мышка. Мышек вдвое больше, чем кошек. После каждой собаки сидит кошка. Сколько собак на Машином рисунке?

Решение. Кошек 5, значит мышек вдвое больше – 10. Для собак остаётся $18 - 10 - 5 = 3$ места (не сказано, что перед каждой кошкой есть собака).

$\boxed{3}$

Задача 5. Сколько разных отрезков можно найти на рисунке? Например, АД и АЕ – два разных отрезка.



Решение. Есть 4 прямые, на каждой по 3 различных отрезка: два маленьких и один большой (сумма двух маленьких). Всего $4 \cdot 3 = 12$ различных отрезков.

$\boxed{12}$

Задача 6. Шарик весит как три Матроскина, а вместе Шарик и Матроскин весят как Дядя Фёдор. Но даже если собрать всех троих, то вместе они наберут половину веса Печкина. Печкин весит 80 кг, сколько весит Матроскин?

$\boxed{5}$

Решение. Половина веса Печкина – это 40 кг. Тогда Дядя Фёдор весит 20 кг, поскольку его вес такой же, как у Шарика и Матроскина вместе – они тоже весят 20 кг. Если Шарика заменить на трёх Матроскиных, то получим, что четыре Матроскина весят 20 кг, откуда один Матроскин – 5 кг, поскольку $5 + 5 + 5 + 5 = 20$.

Задача 7. У 5 работников были гвозди, а у 4 работников – шурупы. У некоторых могли быть и гвозди, и шурупы. Тут пришёл работник дядя Коля с гвоздями и шурупами, и работников с гвоздями и шурупами стало 3. Сколько всего работников теперь?

Решение. Было 2 работника с гвоздями и шурупами (без дяди Коли), тогда только с гвоздями было 3 работника, а только с шурупами было 2 работника. Всего было $3 + 2 + 2 = 7$ человек. С дядей Колей их стало 8.

$\boxed{8}$

Задача 8. Есть 6 карточек: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Составьте из всех карточек наименьшее число, у которого соседние цифры отличаются либо на 3, либо на 2.

Решение. Попробуем начать с самых маленьких цифр согласно условию: 1, 3, 5. Дальше можно поставить только 2, 4, 6.

$\boxed{135246}$

Задача 9. В круг встали 9 человек – рыцари и лжецы. Рыцари говорят только правду, а лжецы в каждой фразе лгут. Каждый человек сказал: «Следующие 2 человека справа от меня – лжецы». Сколько среди них рыцарей?

Решение. Если все лжецы, то каждый будет говорить правду – не подходит. Значит, есть хотя бы 1 рыцарь. Начнём с него: справа от него 2 лжеца: РЛЛ. Четвёртым не может стоять лжец, поскольку тогда второй говорит правду, но он лжец. Получаем РЛЛР. Далее ситуация повторяется тройками РЛЛ. Всего таких троек будет 3, поскольку 9 человек в круге. Значит, всего рыцарей – 3.

$\boxed{3}$

Задача 10. На совещание пришли несколько котов со двора, столько же котов из парка и поменьше – 3 кота – с автостоянки. После этого они разделились на 3 равные группы и пошли ловить мышей. Сколько всего было котов, если их меньше 20?

Решение. Поскольку всех котов можно разделить на 3 группы, то котов со двора (и с парка) тоже можно разделить на 3 группы. Тогда со двора было 3, 6, 9, 12, ... котов. 3 не подходит, поскольку с автостоянки было меньше. 6 – подходит: $6 + 6 + 3 = 15$, и в каждой группе будет по 5 котов. 9 уже не подходит, поскольку $9 + 9 + 3 = 21$, а это больше 20.

$\boxed{15}$

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЫ

XI Санкт-Петербургская математическая олимпиада 2024–2025 учебный год

3 класс

Решения задач отборочного тура

Задача 1. У Толи одна конфета. У Саши – в 10 раз больше и ещё одна. У Вали – в 10 раз больше, чем у Саши, и ещё одна. У Кости – в 10 раз больше, чем у Вали, и ещё одна. А сколько конфет у ребят вместе?

1234

Решение. Достаточно просто посчитать: у Толи – 1 конфета, у Саши – 11, у Вали – 111, у Кости – 1111. Если всё сложить, получится 1234 конфеты.

Задача 2. Игральный кубик бросили 7 раз. Общая сумма выпавших очков оказалась равной 10. Какое самое большое количество очков могло выпасть в одном из бросаний?

4

Решение. Чтоб в какой-то раз было максимальное число, надо, чтоб в остальные разы было минимальное. Минимальное – это 1. Получаем 6 раз по 1 и один раз 4.

Задача 3. Маша записывала числа по порядку – 1, 2, 3 и так далее. В какой-то момент ей надоело, она написала последнее число, и заметила, что цифру 1 она записала 15 раз, цифру 2 – 15 раз, а цифру 3 – 14 раз. Какое число она записала последним?

42

Решение. В первом десятке 1 появляется один раз, во втором – 11, в третьем – 1, в четвёртом – 1 (это уже 14 раз), и, наконец, как только мы написали 41, единица появилась 15-й раз, а 16-й раз появится, когда мы напишем 51. Таким образом, наше число лежит в диапазоне 41-50. Повторяя аналогичные рассуждения для цифр 2 и 3 получим, что наше число – 42.

Задача 4. Костя купил две линейки, три тетради и четыре карандаша за 69 рублей. Оля купила пять линеек, шесть тетрадей и семь карандашей за 144 рубля. На сколько рублей линейка дороже карандаша?

6

Решение. Из того, что сказано про Костю, следует, что 4 линейки, 6 тетрадей и 8 карандашей стоят $69 \cdot 2 = 138$ рублей. Если в таком наборе карандаш заменить на линейку, то получится Олин набор, и стоимость набора вырастет на $144 - 138 = 6$ рублей. Значит, линейка дороже карандаша на 6 рублей.

Задача 5. У Яны был пенал, а в нём – нечётное количество ручек. В первый день она добавила в пенал одну ручку, во второй – 2, в третий – три и так далее. На восьмой день она добавила 8 ручек и заметила, что ручек в пенале стало в несколько раз больше, чем было сначала. Какое самое большое количество ручек могло быть у Яны в пенале сначала?

9

Решение. Всего добавилось $1 + 2 + 3 + \cdots + 8 = 36$ ручек. Так как ручек стало в несколько раз больше, то 36 должно делиться на их начальное количество. Из всех нечётных делителей 36 самый большой – 9.

Задача 6. У тебя есть 4 карточки со словами «Один», «Два», «Три» и «Четыре». Тебе надо расставить их в ряд так, чтобы в соседних карточках не было одинаковых букв. Приведи пример, как это можно сделать. Ответ запиши соответствующими цифрами.

1423 или 3241

Решение. У «Один» может быть только один сосед – это «Четыре», так как с «Два» и «Три» есть одинаковые буквы. Значит, 1 с краю. Рядом с 1, соответственно, 4. Второй сосед четвёрки – это «Два», так как с «Три» у «Четыре» есть общие буквы. Ну а следующий сосед для «Два» – «Три», у них нет общих букв.

Задача 7. В четырёх ящиках лежат кубики. В любых двух ящиках количество кубиков разное, пустых ящиков нет. В первом и втором вместе 3 кубика. В третьем и четвёртом вместе 10 кубиков. Во втором и четвёртом вместе 4 кубика. Сколько кубиков в третьем ящике?

7

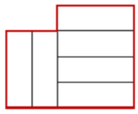
Решение. Так как количество кубиков во всех ящиках разное, а в первом и втором вместе 3, то возможны 2 варианта:

А) в первом – 1 кубик, во втором – 2;

Б) в первом – 2 кубика, во втором – 1.

Так как во втором и четвёртом вместе 4, а во всех ящиках количество разное, то вариант А отпадает. Значит, верен вариант Б. Значит, в четвёртом ящике 3 кубика. Значит, в третьем $10 - 3 = 7$ кубиков.

Задача 8. Фигура на картинке составлена из шести одинаковых прямоугольников. Периметр фигуры равен 54 см. Чему равна длина большей стороны прямоугольника?



9 см

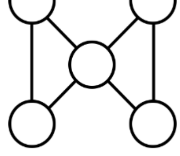
Решение. Из картинки видно, что большая сторона прямоугольника в три раза больше меньшей. Граница фигуры состоит из трёх больших и девяти маленьких сторон прямоугольника, что по длине равно $3 \cdot 3 + 9 = 18$ длин маленьких сторон. Значит, длина маленькой стороны равна $54 : 18 = 3$ см, а большой, соответственно, $3 \cdot 3 = 9$ см.

Задача 9. Пух и Пятачок собирают яблоки с постоянной скоростью – каждый со своей. В один из дней они решили набрать большую корзину. Пух начал собирать раньше Пятачка. К часу дня было собрано 5 яблок, к двум часам – 15, к трём часам – 25. В четыре часа Пух и Пятачок закончили сбор и в корзине оказалось 39 яблок. Сколько яблок собрал Пятачок?

4

Решение. Так как от часа до двух и от двух до трёх было собрано одинаковое количество яблок (по 10), то всё это время Пух собирал яблоки либо один, либо вместе с Пятачком. Если бы они собирали вдвоём, то и в последний час тоже было бы собрано 10 яблок. Но в последний час было собрано 14 яблок, значит, Пух от часу до трёх собирал яблоки один. Значит, скорость Пуха – 10 яблок в час. Так как в последний час собрано 14 яблок, то Пятачок собрал $14 - 10 = 4$ яблока.

Задача 10. Маша нарисовала на стене такую же картинку, как на рисунке. Также у Маши есть три краски. Она закрашивает кружочки на картинке. Кружочки, соединённые отрезком, нельзя закрашивать одним цветом. Сколько разных раскрасок картинки может у неё получиться?



12

Решение. Пусть цвета – красный, синий и зелёный. Раскрасить центральный кружок есть 3 варианта. Допустим, мы его покрасим в зелёный. Тогда вариантов раскраски нижних кружков – 4: КК, КС, СК и СС. Раскраска центрального и нижних однозначно определяет раскраску верхних. Получаем, что для зелёного в центре 4 варианта. Столько же и для синего в центре, и для красного. Всё вместе – 12 вариантов.

XI Санкт-Петербургская математическая олимпиада
2024–2025 учебный год

4 класс

Решения задач отборочного тура

Задача 1. Пять человек сидели в поликлинике в очереди к врачу. Среди них Игорь Николаевич, Павел Аркадьевич (второй с конца очереди) и Анфиса Михайловна (вторая с начала очереди). За 15 минут ни один из них не зашёл в кабинет, зато пришли и заняли очередь ещё два человека, а Игорю Николаевичу было пора на работу, поэтому он ушёл. Теперь Павел Аркадьевич был третьим с начала в очереди, а Анфиса Михайловна – пятой с конца. Каким в очереди с начала был Игорь Николаевич?

Решение. Павел Аркадьевич был вторым с конца, то есть четвёртым с начала очереди, а стал третьим. Значит, ушедший Игорь Николаевич был в очереди перед ним. Анфиса Михайловна была второй с начала очереди и стала пятой с конца, то есть, опять-таки, второй с начала. Значит, Игорь Николаевич был в очереди после неё. Таким образом, он был третьим.

Ответ: Третий

Задача 2. Иннокентий Афанасьевич приобрёл квадратную мраморную плиту со стороной 2 метра и разрезал её на квадратики со стороной 20 см. Этими квадратиками он выложил пол на крыльце размером 1 метр на 60 сантиметров у себя на даче, а из всех оставшихся сделал дорожку шириной в один квадратик от крыльца к колодцу. На каком расстоянии от крыльца дачи находится колодец? Ответ дайте в метрах.

Решение. Так как сторона мраморного квадратика в 10 раз меньше стороны исходной плиты, всего получилось $10 \cdot 10 = 100$ квадратиков. На ремонт пола крыльца ушло $5 \cdot 3 = 15$ квадратиков. Осталось $100 - 15 = 85$ квадратиков на дорожку. Длина такой дорожки равна $85 \cdot 20$ см $= 1700$ см $= 17$ м.

Ответ: 17

Задача 3. Сегодня утром Д'Артаньян вышел из Дворца Короля и направился в сторону Рынка. Портос – наоборот, от Рынка направился ко Дворцу. Атос вышел из Казарм мушкетёров в сторону Монастыря, а Арамис – от Монастыря к Казармам (см. схему). Атос с Арамисом столкнулись в полдень, Д'Артаньян с Атосом – в час дня. Портоса Д'Артаньян встретил у фонтана. Кто из мушкетёров проходил мимо Трактира на перекрёстке последним?

Решение. Д'Артаньян с Атосом могли встретиться только на перекрёстке, значит, они оба прошли мимо Трактира в одно время. Арамиса Атос встретил на час раньше, следовательно Арамис прошёл мимо Трактира раньше Атоса. Фонтан находится на пути Д'Артаньяна уже после Трактира, таким образом Портос добрался до Трактира последним.

Ответ: Портос

Задача 4. Проходя каждые 19 шагов, Витя спотыкается. А Рита чихает через каждые 15 шагов. Однажды на улице Витя и Рита одновременно увидели друг друга и пошли друг другу навстречу с одинаковыми скоростями. До момента встречи Витя успел споткнуться 3 раза, а Рита – 5 раз чихнуть. Какое расстояние в шагах было между Витей и Ритой, когда они друг друга заметили?

Решение. Витя не успел споткнуться в четвёртый раз, значит, он сделал менее $4 \cdot 19 = 76$ шагов. Рита успела чихнуть 5 раз, следовательно она сделала не меньше $5 \cdot 15 = 75$ шагов. Оба прошли до момента встречи по 75 шагов, что в сумме даёт расстояние в 150 шагов.

Ответ: 150

Задача 5. Света удвоила каждую цифру некоторого трёхзначного числа, как-то переставила получившиеся три цифры и прибавила итоговое трёхзначное число к исходному. Получилось 516. Чему равно исходное число? (Числа с цифры 0 не начинаются.)

Ответ: 310

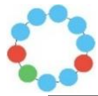
$$\begin{array}{r} \text{АБВ} \\ +\ \text{ГДЕ} \\ \hline 516 \end{array}$$

Решение. Обозначим цифры наших чисел через А, Б, В, Г, Д, Е. Цифра Г может равняться 4 или 2. Рассмотрим вариант Г = 4.

Цифра А должна равняться 1, чтобы сумма не оказалась больше требуемой. Тогда во втором числе есть цифра 2. Она не может быть второй, иначе сумма уже будет не меньше 520. Значит, она третья. В первом числе тоже есть цифра, равная $4 : 2 = 2$, и она тоже третья. Но тогда сумма заканчивается на $2 + 2 = 4$, а не на 6.

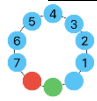
Пусть теперь цифра Г равна 2. Значит, в первом числе есть цифра 1. Она не может быть последней, иначе цифра Е была бы равной 5, то есть нечётной. Тогда она вторая. Рассмотрим теперь цифру А. Если она не больше 2, то вся сумма не больше $219 + 288$, что меньше 516. Больше 3 она тоже быть не может, следовательно она равна 3. Тогда цифра Д равна 0, а значит, и В тоже 0. Цифра Е тогда равна $6 - 0 = 6$, что как раз равно удвоенной цифре А.

Задача 6. У Кати есть две красных, одна зелёная и семь синих бусинок. Сколько различных ожерелий она может собрать, использовав все десять бусинок, если рядом с зелёной бусинкой должна быть ровно одна красная?



Решение. Представим себе 10 бусинок по кругу. Самую ближнюю к нам можно считать зелёной – просто повернём ожерелье зелёной бусинкой к себе. Левую бусинку от зелёной можно считать красной – просто перевернём ожерелье, если нужно. Тогда для второй красной бусинки будет 7 возможных позиций, причём это будут различные ожерелья.

Ответ: 7



Задача 7. Учитель выписал на доске по кругу десять целых чисел. Он попросил учеников в классе к каждому числу прибавить следующее за ним по часовой стрелке. Затем – проделать с новым кругом то же самое действие. И наконец – сложить все числа в получившемся круге. У Маши получилась сумма, равная 284, у Коли – 283, у Андрея – 282, у Ромы – 278, а у Иры – 274. Один из учеников получил правильный ответ. Кто именно?

Решение. Каждое число в круге два раза прибавляется к соседнему числу исходного круга против часовой стрелки и один раз прибавляется к числу, стоящему через одно. Значит, в итоговой сумме каждое число исходного круга участвует ровно четыре раза. Так как числа целые, сумма должна делиться на 4. Только число Маши делится на 4.

Ответ: Маша

Задача 8. В Волшебном городе живут 15 добрых жителей и 100 жадин. Когда к доброму жителю попадает Волшебный фрукт (или его часть), он делит его на три части. Одну съедает сам, а две других раздаёт двум людям, сегодня ещё не евшим Волшебных фруктов. Жадина, получив Волшебный фрукт, тут же всё съедает сам. Сегодня у семи жителей Волшебного города в саду выросло по одному Волшебному фрукту. Какое наибольшее количество жителей сегодня могло поесть Волшебных фруктов?

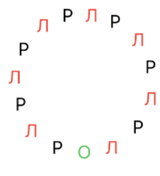
Решение. Всего Волшебных фруктов или их частей может быть не больше $7 + 15 \cdot 2 = 37$. Действительно, 7 фруктов было изначально. И в течение дня 15 добрых людей могли разделить 15 фруктов на 3 части, тем самым увеличивая количество фруктов или их частей на 2. Значит, не более 37 жителей могло отведать фруктов в этот день. Легко понять, что это количество достижимо. Для этого просто нужно, чтобы фрукты достались в первую очередь добрым жителям.

Ответ: 37

Задача 9. По кругу стоят рыцари, лжецы и оруженосцы – всего 15 человек. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут, а оруженосцы говорят правду только рыцарям. Каждый из них сказал своему правому соседу: «Слева от меня – лжец!» Какое наибольшее количество лжецов могло быть в круге?

Решение. Заметим, что двух подряд лжецов в круге быть не может. Иначе правый из них скажет правду своему правому соседу. Тогда лжецов не больше «меньшей половины» от числа 15, то есть не больше 7. Действительно, пусть лжецов 8 или даже больше. Разобьём всех людей в круге на 8 групп: 7 групп по два соседа и одна группа из одного человека. Если в какой-то группе было бы два лжеца, то они были бы соседями, такого быть не может. Значит в каждой группе не более одного лжеца. А значит, ровно по одному лжецу. Так как мы могли любого человека в круге сделать группой из одного человека, получается, что любой человек в круге лжец, что, конечно, неправда. Итак, наше предположение неверно, и лжецов не больше 7.

Пример, в котором 7 лжецов, представлен на рисунке.



Ответ: 7

Задача 10. Найдите такие четыре различных двузначных числа, начинающиеся с цифры 2, чтобы сумма любых двух из них делилась на их разность, и чтобы разность наибольшего и наименьшего чисел была больше 7. В ответе запишите сумму этих четырёх чисел.

Решение. Если проигнорировать условие про разность наибольшего и наименьшего чисел, то будут подходить 6 наборов чисел: (20, 21, 22, 24), (21, 22, 23, 24), (24, 25, 26, 27), (24, 26, 27, 28), (21, 24, 27, 28) и (20, 21, 24, 28). Только у последнего из них разность крайних чисел больше 7. Сумма чисел в этом наборе равна $20 + 21 + 24 + 28 = 93$.

Ответ: 93

Примечание. Можно построить набор из любого количества натуральных чисел такой, что сумма любых двух в нём делится на их разность. Возьмём набор из одного числа (например, 1). А дальше с текущим набором будем проводить следующую операцию – добавлять к набору число 0, а затем увеличивать каждое число на произведение всех чисел предыдущего набора. Тогда из набора 1 мы получим набор 1, 2. Далее – набор 2, 3, 4. Затем получится 24, 26, 27, 28 (один из наборов из примечания 1!) И так далее. Подумайте, почему в каждом таком наборе сумма любых двух чисел будет делиться на их разность?