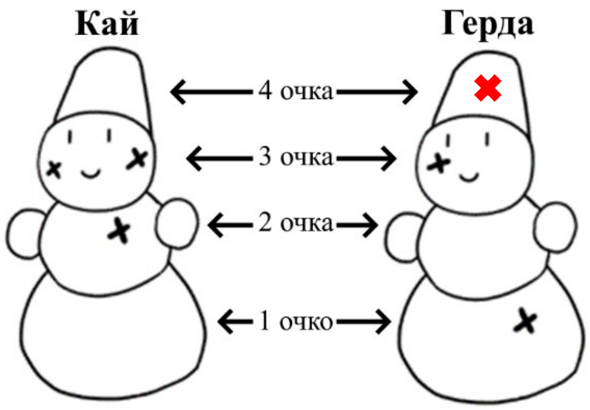
Юбилейная X Санкт-Петербургская математическая олимпиада 2024

Решения задач

1 класс

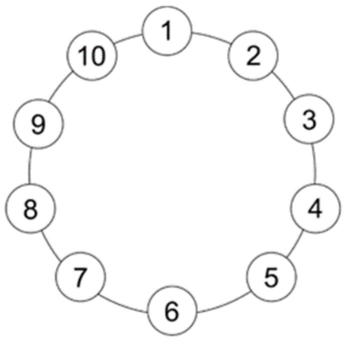


Задача 1. Кай и Герда кинули по три снежка в снеговиков и набрали одинаковое количество очков. Попадание в нижний шар снеговика – это 1 очко, попадание в средний шар снеговика – это 2 очка, попадание в голову снеговика – это 3 очка, а попадание в ведро на голове – 4 очка. Все три попадания Кая отмечены на левом снеговике. Два попадания Герды отмечены на правом.

Ответ изображён на рисунке. Решение. Кай набрал $3 + 3 + 2 = 8$ очков. Герда двумя снежками набрала $3 + 1 = 4$ очка. Ей не хватает ещё 4 очка, значит она должна попасть в ведро на голове снеговика.

Задача 2. У Буратино было на 12 золотых монет больше, чем у Базилио. Буратино купил пять корочек хлеба, а Базилио две. Теперь у них поровну монет. Сколько стоит корочка хлеба?

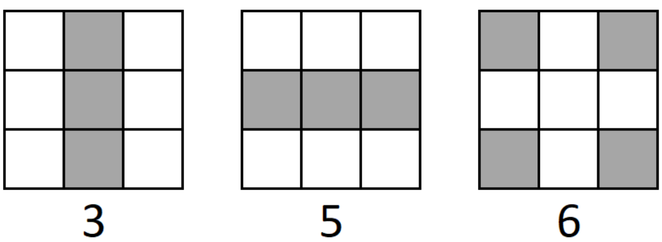
Ответ: 4 монеты. **Решение.** Буратино купил на 3 корочки хлеба больше. И раз после этого стало поровну монет, то он потратил на них свои 12 монет разницы. Таким образом, одна корочка стоит 4 монеты.



Задача 3. Кузнечик умеет прыгать с любого кружка с числом на соседний (смотри рисунок). Он прыгнул три раза в одном направлении, потом повернул назад и прыгнул ещё 11 раз в другом направлении. Оказался кузнечик на кружке с номером 7. А с каких кружков он мог начать?

Ответ: с кружков 5 или 9. **Решение.** Посмотрим на действия кузнечика в обратном порядке. С кружка номер 7 делаем 11 прыжков по часовой стрелке, оказываемся на 8. Затем меняем направление и делаем ещё три прыжка, оказываемся на 5. А если с 7 сделать 11 прыжков против часовой стрелки, окажемся на 6, развернёмся и, сделав три прыжка, окажемся на 9.

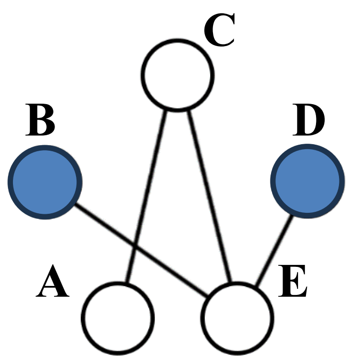
Задача 4. Во все клетки квадрата вписаны числа – двойки и единички. Известно, что сумма чисел в выделенных на первом рисунке клетках равна 3, на втором – 5, а на третьем – 6. Чему равна сумма всех чисел в квадрате?



Ответ: 13. **Решение.** В первом квадрате сумма закрашенных клеток равна 3, значит средний столбик заполнен единичками. Во втором квадрате сумма закрашенных клеток равна 5, значит там 2, 1, 2. Как именно набралось 6 в последних четырёх закрашенных клетках – не важно (например, 1, 1, 2, 2). Находим сумму всех чисел в клетках: $1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 2 + 1 + 2 = 13$.

Другое решение. Так как в центральной клеточке стоит 1, и при сложении всех трёх сумм она будет посчитана дважды, то сумму можно найти так: $3 + 5 + 6 - 1 = 13$.

Задача 5. В семье у Лизы 5 женщин (считая Лизу). На рисунке они обозначены кружками. Среди них есть Лизины прабабушка и сестра. Каждая линия соединяет маму и дочку. Закрасьте те кружочки, которые могли бы обозначать Лизу.



Примечание. Прабабушка – это мама бабушки.

Ответ изображён на рисунке. Решение. Обозначим кружочки буквами **A**, **B**, **C**, **D**, **E**. **A** не может быть Лизой, у неё есть прабабушка, но нет сестры. **B** – может быть Лизой, у неё прабабушка **A**, сестра **D**. **C** – не может быть Лизой, у неё нет прабабушки. **D** – может быть Лизой, у неё прабабушка **A**, сестра **B**. **E** – не может быть Лизой, у неё нет прабабушки.

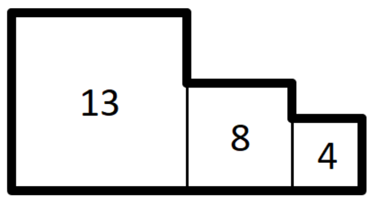
Задача 6. Печкин вёз посылку от почтовой станции до Простоквашино. Он ехал на велосипеде с одной и той же скоростью. Весь путь длиной 18 км занял у него 60 минут. Когда он проехал половину пути, он начал петь песни. Печкин перестал петь, когда ему оставалось ехать до Простоквашино 3 км. Сколько минут Печкин пел?

Ответ: 20 минут. **Решение.** Чтобы проехать половину пути, Печкин потратил 30 минут, и 30 минут ему осталось ехать вторую половину. Вторая половина пути – 9 км. Из них Печкин пел $9 - 3 = 6$ км. А 3 км ехал молча. Если 3 км – одна часть, то 6 км – две таких части. Значит, 30 минут нужно разделить на 3 равные части и взять две из них, то есть Печкин пел 20 минут.

Задача 7. Два гнома положили в свои мешки алмазы. Первый сказал: «Если взять половину алмазов из твоего мешка и добавить ещё 9 алмазов, то получится столько же алмазов, сколько у меня». Второй сказал: «А если взять половину алмазов из твоего мешка и добавить ещё 3, то получится столько же алмазов, сколько у меня». Сколько было алмазов в мешке у каждого?

Ответ: у первого гнома 14 алмазов; у второго гнома 10 алмазов. **Решение.** Половина мешка второго гнома + 9 алмазов + половина мешка первого гнома + 3 алмаза = половина всех алмазов + 12 = все алмазы. Следовательно, 12 – это половина всех алмазов, и всего алмазов было 24. Переберём пары чётных чисел, которые в сумме дают 24, и найдём ту, которая удовлетворяет условию задачи: 22 и 2, 20 и 4, 18 и 6, 16 и 8, 14 и 10, 12 и 12. Нам подходит пара 14 и 10, ведь $5 + 9 = 14$, $7 + 3 = 10$.

Задача 8. В парке проложили три квадратных лыжных трассы: маленькую длиной 4 км, среднюю длиной 8 км и большую длиной 13 км. Вася прошёл один круг по жирной линии. Сколько километров прошёл Вася?

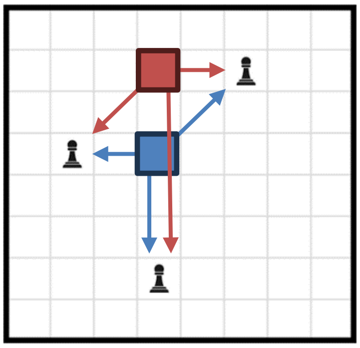


Ответ: 19 км. **Решение.** Маленькая квадратная трасса имеет длину стороны 1 км, средняя – 2 км. Тогда весь путь Васи можно вычислить двумя способами:
1 способ: сложить все известные отрезки пути: $1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + (13 - 2) = 19$ км;
2 способ: вычесть те части, по которым Вася не прошёл: $13 + 8 + 4 - 2 - 2 - 1 - 1 = 19$ км.

Юбилейная X Санкт-Петербургская математическая олимпиада 2024

Решения задач

2 класс



Задача 1. Ферзь умеет бить фигуры противника по вертикали, по горизонтали и по диагонали. Отметьте все такие клетки, откуда ферзь сможет бить все три пешки разом.

Ответ изображён на рисунке.

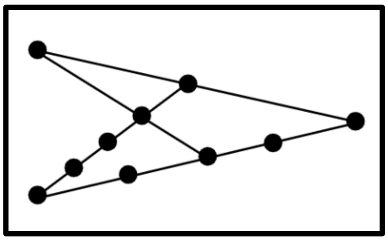
Задача 2. Арина стоит на первой ступеньке длинной лестницы и делает «ходы». Первый «ход» – на 3 ступеньки вверх, второй «ход» – на 1 ступеньку вниз. Затем 5 вверх, 2 вниз, 7 вверх, 3 вниз и так далее. На какой ступеньке будет Арина, сделав 10 своих «ходов», если закономерность продолжится?

Ответ: на 21 ступеньке. **Решение.** Продолжим закономерность: $1 + 3 - 1 + 5 - 2 + 7 - 3 + {}$ $+ 9 - 4 + 11 - 5$ – вверх ходы нечётные по возрастанию, а вниз – натуральные числа по возрастанию. Остаётся посчитать значение этого выражения.

Другое решение. Можно разбить «ходы» на пары: за первую пару $+2$ ступеньки, за вторую $+3$, затем $+4$, $+5$, $+6$. Так же складываем: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$.

Задача 3. На острове есть только рыцари (они говорят только правду) и лжецы (они говорят только ложь). Встретились как-то раз три островитянина – Антон, Боря и Вася. Известно, что среди них есть один или несколько лжецов. Антон говорит остальным: «Вы двое – рыцари». Боря отвечает: «Вася – рыцарь». Кто из них кто?

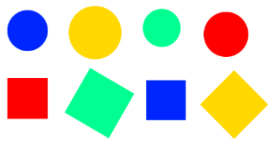
Ответ: Антон – лжец, Боря – лжец, Вася – лжец. **Решение.** Если Антон – рыцарь, то все трое рыцарей, но среди них есть лжец, противоречие. Значит, Антон – лжец. Тогда не правда, что остальные двое – рыцари. Если Боря рыцарь, то и Вася рыцарь, но уже известно, что они вдвоем не могут быть рыцарями, значит Боря – лжец. Тогда Вася – тоже лжец, поскольку Боря лжёт.



Задача 4. Заяц, Волк, Лиса и Белка начертили четыре различные прямые линии (каждый свою), и поставили на них несколько точек. На прямых Зайца и Волка оказалось по 3 точки, а у Лисы и Белки – по 5 точек. Всего получилось 10 точек. Как такое могло быть?

Пример подходящей картинки изображён справа. Решение. Нарисовать 4 прямые так, чтобы каждая пересекала каждую – это 6 пересечений, в них поставить 6 точек. На каких-то двух прямых дорисовать ещё по 2 точки где угодно. Точки пересечения считаются дважды, поэтому вместо $3 + 3 + 5 + 5 = 16$ точек получаем на 6 точек меньше $16 - 6 = 10$.

Задача 5. У Толи есть четыре картонных кружочка разных цветов (синий, красный, жёлтый, зелёный) и четыре квадрата разных цветов (таких же). Толя хочет взять какой-то один кружочек и положить его на какой-то один квадрат или наоборот – какой-то один квадрат на какой-то один кружочек. Сколько у Толи способов сделать это, если нельзя класть красную фигуру на красную?



Ответ: 30 способов. **Решение.** Каждый кружочек можно положить на любой из квадратов, всего $4 + 4 + 4 + 4 = 16$ вариантов. Но один вариант не подходит – красный-красный. Остаётся 15 вариантов. Для квадратиков – так же 15 вариантов. Всего – $15 + 15 = 30$.

Задача 6. Учительница записала на доске семь цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 в ряд в каком-то порядке, причём 7 оказалась второй справа. Второклассники назвали несколько двузначных чисел, которые они увидели на доске: 62, 13, 56 и 35. В каком порядке написаны цифры на доске?

Ответ: 1356274. **Решение.** Выпишем, например, первое число 62 и посмотрим, какие цифры могли стоять слева от 6 – это только 5. Продолжим: слева от 5 – это 3, слева от 3 – это 1. Мы уже выписали 5 цифр: 13562, значит, оставшиеся две цифры надо написать справа, поскольку 7 должна стоять предпоследней, а для этого 4 – последней.

Задача 7. Миша проплывает 2 бассейна за 2 минуты, Коля – вдвое медленнее, а их папа – вдвое быстрее Миши. Папа проплыл на 15 бассейнов больше Коли за то же время. За какое время?

Ответ: 10 минут. **Решение.** Коля плывёт 1 бассейн за 2 минуты, а папа – 4 бассейна за это время. Значит, каждые две минуты он обгоняет Колю на 3 бассейна. Чтобы получилось 15 бассейнов, ему потребуется сделать это 5 раз: $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$. Каждый раз он тратит 2 минуты: $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$ мин.

Задача 8. У Саши есть 5 карточек с одним числом и ещё 5 карточек – с другим. Из чисел на трёх карточках Саша может получить в сумме 9, а из чисел на четырёх карточках может получить в сумме 8. Какие два числа могут быть на Сашиных карточках? Найдите все возможные варианты.

Ответ: (1, 3) или (2, 3) или (2, 5). **Решение.** Сделаем аккуратный перебор. Будем располагать 3 карточки по возрастанию, чтобы получилось 9, и затем подбирать вторую сумму, равную 8.

- $1 + 1 + 7 = 9$, $1 + 7 = 8$ – не годится;
- $1 + 4 + 4 = 9$, $1 + 1 + 1 + 1 + 4 = 8$ – не годится;
- $2 + 2 + 5 = 9$, $2 + 2 + 2 + 2 = 8$ – годится;
- $3 + 3 + 3 = 9$, $1 + 1 + 3 + 3 = 8$ – годится;
- $3 + 3 + 3 = 9$, $2 + 2 + 2 + 2 = 8$ – годится;

4 и больше для первой карточки уже не подходят, ведь три такие числа будут в сумме больше 9.

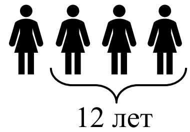
Другое решение. Перебор организован иначе. Сумма трёх чисел равна девяти. Если все три числа одинаковы, то это три карточки «3» (дальше рассуждения как в первом решении). Если два числа одинаковы, то это две «1», две «2», две «3» или две «4» (третье число восстанавливается однозначно). Все три карточки разными быть не могут.

Юбилейная X Санкт-Петербургская математическая олимпиада 2024

Решения задач

3 класс

Задача 1. Соне и Маше сейчас вместе 13 лет. Через 12 лет Соня станет в 4 раза старше, чем сейчас. А сколько сейчас лет Маше?

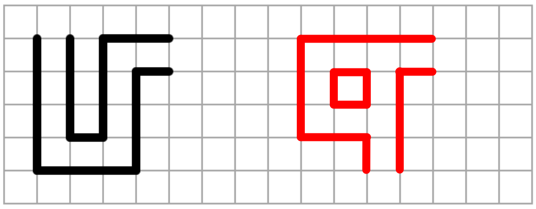


Ответ: 9 лет. **Решение.** Так как Соня через 12 лет станет в 4 раза старше, то 12 лет – это три Сониных возраста сейчас. Значит, Соне сейчас $12 : 3 = 4$ года. Маше, соответственно, $13 - 4 = 9$ лет.

Задача 2. Ира идёт по коридору шириной в одну клеточку, соблюдая некие правила:

1. шаг с той клетки, на которой она стоит, Ира может сделать только на соседнюю по стороне клетку.
2. наступать на клетку, где она уже была, Ира не может.

По такому коридору, как на рисунке, Ира сможет пройти, следуя правилам. Нарисуйте коридор из 10 клеточек, по которому Ира, соблюдая правила, пройти не сможет.



Один из возможных примеров изображён на рисунке справа.

Задача 3. Костя и Эллина в течение пяти дней готовились к олимпиаде. Оба сделали календарики, пронумеровали дни подготовки от 1 до 5. Если Костя в какой-то день решал много задачек, он называл такой день *хорошим*, если нет – *плохим*. Эллина точно так же называла свои дни – в соответствии со своими успехами. У Кости оказалось 2 плохих дня, и сумма номеров этих дней равна 6. У Эллины плохими были первый день и ещё два дня. Если номера её плохих дней перемножить, то получится число, которое делится на 10. У Кости и Эллины оказался ровно один общий хороший день. Какие дни оказались для Кости хорошими?

Ответ: 1, 3 и 5. **Решение.** У Кости плохие дни могут быть 1 и 5 (вариант **A**) или 2 и 4 (вариант **B**). У Эллины плохие дни могут быть 1, 2 и 5 (вариант **X**) или 1, 4 и 5 (вариант **Y**). Общие хорошие дни в **A** и **X** – это 3 и 4, в **A** и **Y** – 2 и 3, в **B** и **X** – только 3, в **B** и **Y** – только 3, значит, для Кости подходит вариант **B**, в котором хорошими являются дни 1, 3 и 5.

Задача 4. После сильного снегопада Яна вышла расчищать двор от снега. В час дня, когда она уже убрала 400 кг снега, ей на помощь пришли Оля и Толя, которые убирают снег с такой же скоростью, что и Яна. Когда осталось убрать 200 кг снега, ребята сказали ей: «Дальше сама», и ушли. Яна закончила уборку снега в 4 часа дня. А за какое время Яна убрала бы весь снег, работая одна?

Ответ: 9 часов. **Решение.** Снег, который убрали втроём, назовём «общий снег». С часу дня до 4-х, то есть за 3 часа, Яна убрала треть общего снега и ещё 200 кг. Значит, весь общий снег и ещё 600 кг Яна убрала бы за 9 часов. А общий снег и 600 кг – это как раз то, что Яна убрала бы, работая одна.

Задача 5. Марина купила в магазине много манго, груш и яблок. К ней в гости зашёл Толя, и Марина решила угостить его этими фруктами. Она положила на тарелку одно яблоко, одну грушу и два манго. Толя по настроению выбирает два обязательно разных фрукта, съедает их и немножко отдыхает, а Марина добавляет на тарелку фрукт третьего вида (то есть не тех видов, которые Толя только что съел). После этого процесс угощения продолжается до тех пор, пока все фрукты на тарелке не окажутся одного вида. Какие фрукты могут в конце остаться на тарелке?

Ответ: манго. **Решение.** Обозначим $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ набор из $\boldsymbol{x}$ яблок, $\boldsymbol{y}$ груш и $\boldsymbol{z}$ манго. Сначала на тарелке набор $(1, 1, 2)$. После первого обновления содержимого он превратится либо в $(0, 0, 3)$, либо в $(0, 2, 1)$, либо в $(2, 0, 1)$. В первом случае угощение закончено и на тарелке останутся манго. Во втором случае процесс продолжится так: $(0, 2, 1) \rightarrow (1, 1, 0) \rightarrow (0, 0, 1)$, и в конце на тарелке останется 1 манго. Третий случай аналогичен второму – на тарелке останется 1 манго. Таким образом, как бы ни пошёл процесс угощения, на тарелке останется манго.

Задача 6. У Оли есть 20 яблок, они разложены в 5 кучек. За один ход можно переложить любое количество яблок из одной кучки в другую. Толя говорит, что, как бы яблоки ни были разложены, можно за один, два или три хода сделать равным количество яблок во всех пяти кучках. Яна же утверждает, что это не так. Кто прав – Толя или Яна? Почему?

Ответ: права Яна. **Решение.** Приведём пример, показывающий, что Яна права. Если яблок станет везде одинаково, то их будет по 4 в кучке. Пусть сначала в первых четырёх кучках будет по 3 яблока, а в пятой – 8. Положим, за несколько ходов удалось сделать количество яблок во всех кучках одинаковым. Тогда за каждую из первых четырёх кучек отвечает ход, состоящий в том, что в ней увеличивают количество яблок. Значит, количество ходов не менее четырёх и, соответственно, трёх ходов не хватит.

Задача 7. Кристина задумала две цифры и выписала все двузначные числа, составленные из этих цифр. Например, если она задумала 5 и 1, то она выписала числа 55, 11, 51 и 15. Потом она сложила получившиеся числа. Сумма оказалась равна 374. Какое самое маленькое число выписала Кристина?

Ответ: 88. **Решение.** Первым делом заметим, что обе цифры – не ноль, иначе двузначных чисел было бы два и максимальная сумма была бы $90 + 99 = 189$, что меньше, чем 374. Заметим также, что, если цифры одинаковые, то из них можно составить только одно число, и самое большое возможное – это 99. Итого, цифры разные и ни одна из них не равна 0, тогда обозначим их $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Тогда она выписала числа $\boldsymbol{AA}$, $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{BA}$ и $\boldsymbol{BB}$. Подсчитаем сумму: $\boldsymbol{AA} + \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BA} + \boldsymbol{BB} = 10\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} + 10\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + 10\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} + 10\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B} = 22\boldsymbol{A} + 22\boldsymbol{B}$. Так как $374 : 22 = 17$, то $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = 17$ и, соответственно, у Кристины были цифры 8 и 9. Значит, самое маленькое число было 88.

Задача 8. Вдоль дороги через метр посадили сто берёз и написали на них по порядку номера – первая, вторая и так далее. Тут же на пять из них сели пять воробьёв. Потом воробьи стали перелетать с берёзы на берёзу по такому правилу: если какой-то воробей перелетает с одной берёзы на другую, то какой-нибудь другой воробей тут же перелетает на столько же метров, но в противоположном направлении. В какой-то момент все воробьи оказались на 10-й берёзе. Какой самый большой номер мог быть у берёзы, на которой сначала сидел 4-й по удалённости от первой берёзы воробей?

Ответ: 21. **Решение.** Заметим, что сумма расстояний от воробьёв до первой берёзы не меняется. Так как все в какой-то момент оказались на 10-й, то сумма расстояний равна $5 \cdot 9 = 45$. Четвёртый воробей не мог быть на 22-й берёзе или дальше, так как тогда сумма расстояний от 4-го и 5-го была бы не менее, чем $21 + 22 = 43$, а значит, сумма расстояний от первого, второго и третьего не более, чем 2, чего быть не может (минимум – 3). Приведём пример, когда 4-й воробей на 21 берёзе: 1-й – на первой, 2-й – на второй, 3-й – на третьей, 4-й – на 21-й и 5-й на 23-й. Сумма расстояний как раз равна $0 + 1 + 2 + 20 + 22 = 45$.

Юбилейная X Санкт-Петербургская математическая олимпиада 2024

Решения задач

4 класс

Задача 1. Аркадий распилил бревно на 8 брёвнышек. Папа Аркадия распилил каждое брёвнышко на несколько поленьев (разные брёвнышки могли оказаться распилены на разное количество поленьев). Всего поленьев оказалось 30. Сколько всего распилов сделал папа?

Ответ: 22. **Решение.** Между 30 поленьями – 29 распилов. Из них 7 сделаны Аркадием. Значит, папа сделал оставшиеся $29 - 7 = 22$ распила.

Задача 2. Аркадий тщательно перемешал девять карточек, пронумерованных числами от 1 до 9, и раздал папе, маме и себе по три карточки. Все три числа на карточках Аркадия оказались меньше 5. У папы, наоборот, все числа больше 5. Из маминых чисел ровно два делятся на 3. Карточки с какими числами достались Аркадию?

Ответ: «1», «2» и «4». **Решение.** Всего на карточках есть три числа, делящихся на 3: это «3», «6» и «9». Ровно два из них достались маме. Это не могли быть числа «6» и «9», так как тогда для папы остаются только два числа, больших 5: это «7» и «8». Значит, хотя бы одно из чисел мамы равно 3. Тогда Аркадию, все числа которого меньше 5, остаются только числа «1», «2» и «4».

Задача 3. Аркадий с папой нашли клад – 20 однорублёвых монет – и стали его делить. Аркадий подкидывает очередную монету. Если выпадает орёл, он убирает эту монету к себе в карман. Если выпадает решка, папа забирает себе и эту монету, и ещё три неразыгранные монеты (или все, если осталось меньше трёх). Всего Аркадий подкинул 7 монет. Сколько монет в итоге досталось Аркадию?

Ответ: 2 монеты. **Решение.** Из 20 монет Аркадий подкинул только 7. Остальные 13 забрал папа. Неподкинутые монеты папа всегда забирает по 3 штуки, кроме, возможно, последнего раза. Так как $13 = 3 + 3 + 3 + 3 + 1$, папа забирал себе монеты 5 раз. Значит, 5 раз выпадала решка. Оставшиеся 2 раза выпадал орёл.

Задача 4. На Дальнем Острове живут рыцари и лжецы. Рыцари говорят только правду, а лжецы всегда лгут. Однажды на полянке встретились пять жителей острова: Ау, Бу, Ву, Гу и Ду. Ау сказал: «Среди нас пятерых лжецов больше, чем рыцарей!» Бу заявил: «Ву рыцарь!» Ву ответил: «Бу рыцарь!» Кто из них рыцари, если Гу и Ду – лжецы?

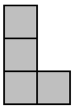
Ответ: только Ау. **Решение.** Пусть Ау – лжец. Тогда его заявление должно быть неправдой, и рыцарей должно быть больше, чем лжецов. Но лжецов уже как минимум три: Ау, Гу и Ду. Получилось противоречие. Значит, Ау рыцарь, и лжецов действительно больше, чем рыцарей. Если Бу или Ву – рыцарь, то его высказывание верно, и второй из них тоже рыцарь. Получилось слишком много рыцарей. Значит, Бу и Ву тоже лжецы.

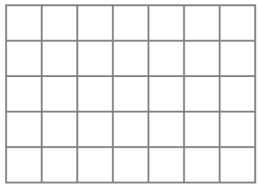
Задача 5. У марсианина бывает 3 или 4 руки. На горе Олимп (самая высокая вершина Марса) и в долине Эллада (самая глубокая низменность Марса) живёт одинаковое количество марсиан. У первых в сумме 53 руки, а у вторых – 67. Сколько марсиан живёт на горе Олимп?

Ответ: 17. **Решение.** Если марсиан на Олимпе 18, то у них минимум $18 \cdot 3 = 54$ руки, что больше 53. Если же марсиан на Олимпе (и в долине Эллада) 16, то у них максимум $16 \cdot 4 = 64$ руки, что не дотягивает до 67. Следовательно, марсиан на Олимпе ровно 17.

Примечание. Можно установить, что на Олимпе 15 трёхруких и 2 четырёхруких марсианина, а в долине – 1 трёхрукий и 16 четырёхруких.

Задача 6. Справа нарисован прямоугольник 5×7. Какое наибольшее количество 4-клеточных фигурок (см. рисунок слева) в нём можно разместить так, чтобы они не накладывались друг на друга? Фигурку можно как угодно поворачивать и переворачивать, но в каждом положении фигурка должна встретиться не более одного раза!





Ответ: 8 фигурок. **Пример изображён на рисунке ниже. Решение.** Так как в прямоугольнике всего 35 клеток, не получится использовать 9 или более 4-клеточных фигурок. А вот 8 таких фигурок разместить можно, и все они будут ориен-тированы по-разному (смотри рисунок).

Другое решение. Можно заметить, что есть всего 8 возможных положений фигурки, и каждое должно встретиться не более одного раза.

Задача 7. Принцесса Жасмин разложила сто самоцветов по шести шкатулкам, положив в каждую хотя бы по одному. В первой, второй, четвёртой и шестой шкатулках в сумме оказалось 64 самоцвета. В третьей лежало на 34 самоцвета больше, чем в первой. В шестой больше, чем в пятой, и в 25 раз меньше, чем в четвёртой. Сколько самоцветов во второй шкатулке?

Ответ: 11. **Решение.** Найдём количество самоцветов в третьей и пятой шкатулках: $100 - 64 = 36$. Так как в пятой шкатулке хотя бы один самоцвет, в третьей шкатулке не больше 35 самоцветов. Но и не меньше 35, так как в ней на 34 самоцвета больше, чем в первой шкатулке. Значит, в третьей шкатулке ровно 35 самоцветов, а в первой и пятой – по одному. В шестой шкатулке больше, чем в пятой, то есть минимум 2. В четвёртой шкатулке в 25 раз больше, чем в шестой, но при этом меньше 64. Следовательно, в ней ровно 50, а в шестой – 2. Тогда во второй шкатулке число самоцветов равно $64 - 1 - 50 - 2 = 11$.

Задача 8. Сто гномов в футболках с номерами 00, 01, 02, …, 98, 99 собрались устроить турнир по игре в гномбол. Самое сложное для гномов всегда – разделиться на команды. В каждой команде один вратарь и поровну игроков правого и левого флангов. В командах должно быть поровну игроков, причём никакие два гнома не согласны играть в одной команде на одном фланге, если у них номера на футболке начинаются на одну и ту же цифру или заканчиваются на одну и ту же цифру. Удастся ли гномам разделиться на команды при таких условиях? Если да, то на сколько команд?

Ответ: ДА (на 20 команд). **Решение.** Прежде всего заметим, что в каждой команде нечётное количество игроков. Ведь игроков на обоих флангах в команде поровну, но есть ещё вратарь. Число 100 делится только на два нечётных числа, больших 1: это 5 и 25. Однако 25 человек в команде быть не может, так как тогда на каждом фланге по 12 игроков, и у каких-нибудь двух точно совпадут последние цифры номеров.

Приведём теперь пример, как можно разделить участников на 20 команд по 5 человек. Разделим их сначала на команды по 10 человек. Первая команда будет такая: (00, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99). Теперь просто прибавим по 1 к каждому номеру, причём, если номер заканчивался на 9, мы оставим цифру в разряде десятков неизменной. Повторим эту процедуру ещё 8 раз. Теперь каждую команду разделим на две команды по 5 игроков как угодно. Указанные команды будут отвечать необходимым условиям.

Примечание. Наглядно проще всего способ разделения на парные команды по 10 гномов увидеть следующим образом. Запишем все номера футболок в таблицу 10×10. Видно, что два номера начинаются на одну цифру, если они в одной строке, а заканчиваются на одну цифру, если они в одном столбце. То есть, нужно просто разделить все клетки таблицы на группы по 10 клеток так, чтобы в каждой группе никакие две не были в одной строке или одном столбце. Проще всего разделить таблицу на «диагонали», как показано на рисунке.

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99