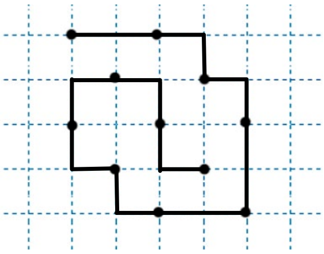
Санкт-Петербургская математическая олимпиада 2022

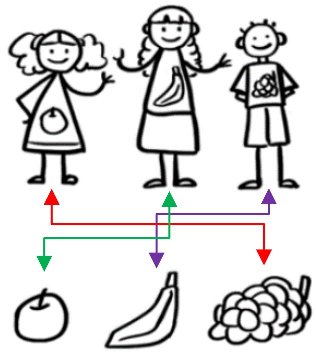
Решения задач

1 класс



Задача 1. Нарисуй дорожку по линиям сетки, проходящую через все точки и не пересекающую себя.

Один из возможных ответов изображён на рисунке.



Задача 2. Каждый из детей взял один фрукт, причём не тот, что нарисован на его футболке. При этом яблоко взял не мальчик. Соедини линиями, у кого что.

Ответ изображён на рисунке.

Решение. У мальчика не яблоко и не виноград, значит банан. У девочки с яблоком виноград, а у девочки с бананом яблоко.

Задача 3. На столе лежат несколько мешочков с одинаковым количеством конфет. Четыре мешочка вместе содержат меньше 50 конфет, а пять мешочков вместе содержат больше 50 конфет. Сколько конфет могло быть в одном мешочке?

Ответ: 11 или 12. **Решение.** Если в каждом мешочке будет по 10 конфет, то в сумме в пяти мешочках будет 50, а по условию должно быть больше. Значит в мешочках больше 10. Если в мешочке 11 конфет, то в четырёх мешочках – 44 конфеты, меньше 50, а в пяти мешочках – 55 конфет, больше 50. Этот вариант подходит. Если в мешочке 12 конфет, то в четырёх мешочках 48 конфет, меньше 50, а в пяти мешочках – 60 конфет, больше 50. Тоже подходит. Если в каждом мешочке будет 13, то в сумме в четырёх мешочках получится 52, а по условию должно быть меньше. Значит конфет в мешочках может быть по 11 или по 12.

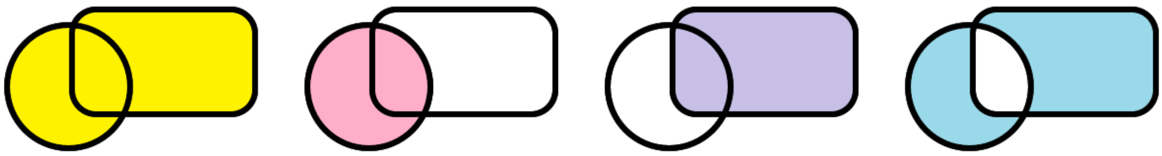
Задача 4. Если лягушку поцеловать, она превратится или в принцессу, или в тыкву. Если принцессу поцеловать, она превратится или в тыкву, или в лягушку. Сколько тыкву не целуй, она останется тыквой. Лягушку поцеловали 5 раз. В кого в результате она могла превратиться?

Ответ: тыква или принцесса. **Решение.** Если в какой-то момент получилась тыква, в результате получится тоже тыква. Допустим, тыква никогда не получалась. Тогда лягушка и принцесса будут чередоваться. Через пять поцелуев останется принцесса. Значит, может получиться либо тыква, либо принцесса.

Задача 5. Когда из правой кучки переложили в левую 4 палочки, а из левой в правую 6, то оказалось, что в правой на одну палочку больше. В какой кучке было больше палочек в начале и на сколько?

Ответ: в левой кучке было больше на 3 палочки. **Решение.** Из правой переложили 4 палочки и добавили в неё 6. Всего получилось, что в правую добавили две, а значит из левой две убрали. В правой стало на одну больше. Значит правая кучка плюс два равно левая кучка минус два плюс один, то есть минус один. Следовательно изначально левая кучка была на три палочки больше.

Задача 6. На рисунке показано, сколько минут понадобилось художнику, чтобы раскрасить области. Определите, сколько времени ему потребуется, чтобы раскрасить область на правой картинке.



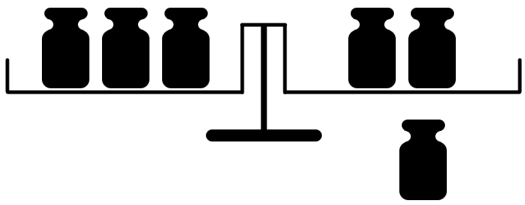
10 минут 4 минуты 8 минут ? минут

Ответ: 8 минут. **Решение.** Круг равен 4, а прямоугольник 8. Если мы их сложим, то посчитаем среднюю фигуру два раза, а в сумме получим 12. $10 =$ круг $+$ прямоугольник $-$ $-$ 1 средняя фигура, значит средняя фигура равна 2. Тогда круг $+$ прямоугольник $-$ $-$ 2 средние фигуры равно $4 + 8 - 2 - 2 = 8$.

Задача 7. Андрей бегает быстрее Бори, Вова бегает быстрее Гены. Они стартовали одновременно. Напишите все варианты того, в каком порядке могли финишировать мальчики, если никакие два из них не пришли к финишу одновременно.

Ответ: ВГАБ, ВАГБ, ВАБГ, АБВГ, АВБГ, АВГБ (каждая буква соответствует одному из мальчиков: Вова – В, Гена – Г, Андрей – А, Боря – Б).

Задача 8. Есть 6 гирь массой 1, 2, 3, 4, 5 и 6 кг. Пять из них поставили на весы, а одна гирька осталась в стороне. Весы пришли в равновесие. Какие это могли быть гири? Напишите все варианты.



Комментарий: необходимо указать, какие гири стоят на весах.

Ответ: 2, 3, 5 и 4, 6; 1, 2, 6 и 4, 5; 1, 3, 4 и 2, 6. **Решение.** Сумма всех весов гирь равна 21. Если в стороне останется гиря чётного веса, сумма оставшихся будет нечётной, значит, весы не смогут прийти в равновесие. Для всех гирь нечётного веса есть пример: $1 + 2 +$ $+ 6 = 4 + 5$ (3 осталась); $1 + 3 + 4 = 2 + 6$ (5 осталась); $2 + 3 + 5 = 4 + 6$ (1 осталась).

Санкт-Петербургская математическая олимпиада 2022

Решения задач

2 класс

Задача 1. Богатыри всегда правдивы. Алёша Попович сказал: «Я с Тугарином биться без Добрыни не пойду!». Добрыня сказал: «Не пойдёт Илья Муромец, так и я не пойду!». А Илья сказал: «Алёша, если Добрыня не пойдет, так я пойду!». В результате кто-то один вышел против Тугарина и победил его. Мог ли это быть Алёша и почему? Мог ли это быть Добрыня и почему? Мог ли это быть Илья и почему?

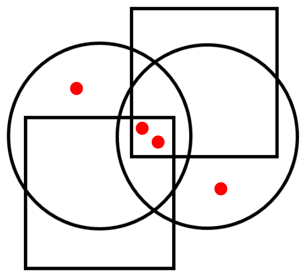
Это мог быть Алёша: нет. **Пояснение:** он не может пойти один, только с Добрыней.

Это мог быть Добрыня: нет. **Пояснение:** он не может пойти один, только с Ильёй.

Это мог быть Илья: да. **Пояснение:** Добрыня не пойдёт, поэтому он может пойти.

Задача 2. На гранях кубика написаны числа от 1 до 6. Оказалось, что наибольшая сумма чисел на противоположных гранях равна 10, а наименьшая равна 4. Какое число написано напротив 2?

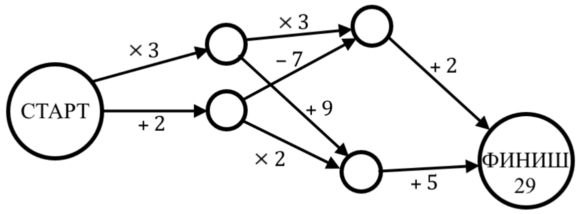
Ответ: 5. **Решение.** Сумму 10 можно получить только как $6+4$, а сумму 4 только как $1+3$. Остаются два числа 2 и 5, они напротив друг друга.



Задача 3. Расставьте на рисунке 4 точки так, чтобы в каждом прямоугольнике было 2 точки, в каждом круге – 3 точки.

Ответ изображён на рисунке.

Задача 4. Лягушонок задумал число и начал прыгать от кочки «СТАРТ» до кочки «ФИНИШ» по стрелкам. Каждый раз он выполнял указанное действие и в итоге получил 29. Какое число он мог задумать? Найдите все варианты.

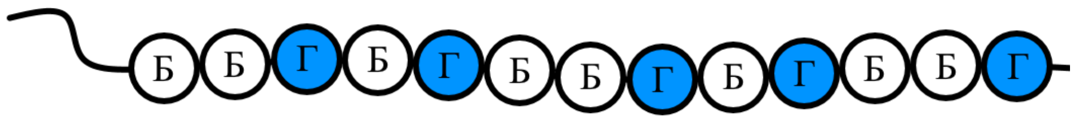


Ответ: 3, 5, 10, 32. **Решение.** Всего 4 варианта добраться до правой кочки. Каждый вариант даёт своё начальное число для левой кочки. Эти числа находим, прыгая по стрелкам назад и выполняя обратные действия.

Задача 5. В турнире 5 шахматистов играют каждый с каждым один раз. Герман, Тарас и Петя сыграли каждый 2 игры, Антон – 3 игры, а Игнат – 1 игру. Сколько игр осталось сыграть в этом турнире?

Ответ: 5 игр. **Решение:** Первый сыграл 4 игры с остальными, второй – 3 игры с остальными (с первым уже посчитали). Далее: третий – 2 игры и четвёртый – 1 игру. Всего в турнире $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ игр, в каждой участвуют двое. Сейчас сыграно $(2 + 2 + 2 + 3 + 1) : 2 = 5$ игр. Осталось $10 - 5 = 5$ игр.

Задача 6. Аня нанизывает белые и голубые бусины в такой последовательности, как показано на рисунке. В какой-то момент впервые оказалось, что она использовала голубых бусин на 10 меньше, чем белых. Сколько всего бусин использовала Аня к этому моменту?



Ответ: 42 бусины. **Решение.** Заметим, что кусок ББГБГ повторяется. На 3 белых бусины приходится 2 голубые, разница в одну бусину. Повторим этот фрагмент 8 раз, сейчас белых на 8 больше, чем голубых, а всего $5 \times 8 = 40$ бусин. Следующие две бусины в последовательности белые и их становится на 10 больше, чем голубых.

Задача 7. Занятия у коротышек начинаются в 9:00. В понедельник у Незнайки два урока до 9:46. Во вторник у Незнайки 4 урока, которые заканчиваются в 10:36. Между каждыми двумя уроками есть перемена и все они одинаковой продолжительности. Сколько же длится один урок в Солнечном городе?

Ответ: 21 минуту. **Решение.** 2 урока вместе с переменой длятся 46 минут. 4 урока и 3 перемены – это $60 + 36 = 96$ минут. Таким образом, $96 - 46 = 50$ минут – это 2 урока и 2 перемены. 1 урок и 1 перемена – это 25 мин. Тогда 1 урок длится $46 - 25 = 21$ минуту (а перемена $25 - 21 = 4$ минуты).

Задача 8. Трём осьминожкам нужны сапожки. На затонувшем корабле везли 20 белых, 20 чёрных, 20 красных и 20 коричневых сапог. В трюме темно и цвет сапожек не виден. Сколько сапожек надо захватить самое меньшее, чтобы каждый осьминожек получил 8 одинаковых сапожек и цвет был у каждого свой?

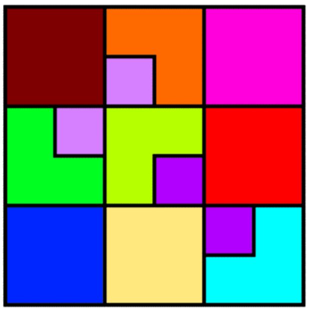
Ответ: 55 сапожек. **Решение.** Если вытащить $20 + 20 + 7 + 7 = 54$ сапожков, то может оказаться, что нет трёх цветов по 8 сапожков. Но любой следующий сапожок добавит 8-й сапог в один из комплектов по 7 сапожков.

Санкт-Петербургская математическая олимпиада 2022

Решения задач

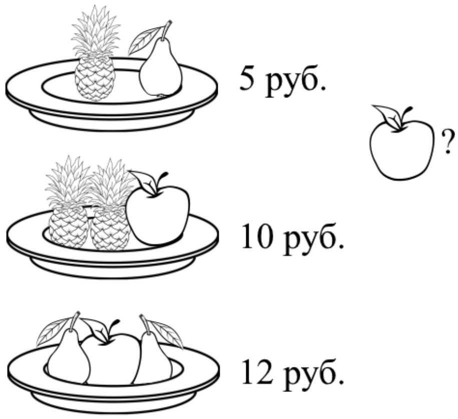
3 класс

Задача 1. На столе выложены квадратные карточки (стикеры) одного размера, причём от каждой карточки виден хотя бы уголок. Какое количество карточек выложено?



Ответ: 11 карточек. **Решение.** Всего видим 13 частей. Но маленькие квадраты, касающиеся углом, являются частями одного стикера. Таких пар квадратов две, значит всего на 2 части меньше – 11 стикеров.

Задача 2. На тарелках выложены наборы фруктов и указаны цены этих наборов. Определите, сколько стоит яблоко.



Ответ: 6 рублей. **Решение.** Ананас + ананас + яблоко = 10 рублей. Груша + груша + яблоко = 12 рублей. Тогда, два ананаса + две груши + два яблока = 22 рубля. Ананас + груша = 5 рублей, значит два ананаса + две груши = 10 рублей. Тогда два яблока стоят 22 – 10 = 12 рублей. Значит одно яблоко стоит 12 : 2 = 6 рублей.

Задача 3. Решите ребус: КАР + КАР + КАР = СЫР. Одинковыми буквами обозначены одинаковые цифры, а разными – разные. Необходимо найти одно решение.

Пример: 215 + 215 + 215 = 645. **Замечание.** Буква Р должна быть равна или 0, или 5. Остальные цифры легко подбираются.

Задача 4. Рыцарь и лжец взвешивали три монеты (две настоящих и одна фальшивая, легче настоящей) на чашечных весах. «Одна из этих монет фальшивая» – сказал один, взвесив первую и вторую монеты. «Первая монета тяжелее» – добавил другой. Какая монета фальшивая и кто из них рыцарь, а кто лжец?

Ответ: первая монета фальшивая; первый – рыцарь, второй – лжец. **Решение.** Допустим, первый лжец. Тогда второй – рыцарь, и первая монета действительно тяжелее, а значит вторая легче и фальшивая. Но при этом получается, что первый сказал правду – противоречие. Значит, первый рыцарь, и одна из двух взвешенных монет – фальшивая. Второй – лжец и сказал, что первая тяжелее, то есть фальшивая вторая. Значит, фальшивая первая.

Задача 5. У Ани и Вани есть карточки, на которых написаны по одной цифре: 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5. Они ходят по очереди, первая – Аня. За ход разрешается взять одну или несколько карточек с суммой цифр 5. После того, как ходы закончились, каждый складывает из своих карточек самое большое возможное число. Каким оно может быть?

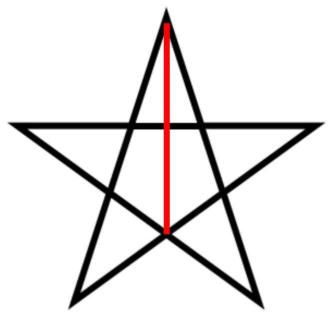
Комментарий: нужно указать одно число, самое большое из возможных.

Ответ: 33211. **Решение.** Чем больше в числе цифр, тем больше число. Есть ровно один набор из карточек с суммой цифр 5, состоящий из трёх цифр: 1, 1, 3. Есть два набора из двух карточек с суммой цифр 5: 2, 3 и 4, 1. Можно так же взять 5. Всего 5 наборов, но набор 1, 1, 3 и набор 1, 4 взять в ходе одной игры не получится. Значит, Аня возьмёт два набора и её соперник – два, после чего игра закончится. Аня может взять набор 1, 1, 3, так как в нём больше цифр, и набор 3, 2. В результате у неё будут карточки: 1, 1, 2, 3, 3, а самое большое число, которое можно получить – 33211.

Задача 6. Из набора квадратной кафельной плитки 1×1, используя все плитки, можно сложить прямоугольник с периметром 22, или с периметром 32 или с периметром 58, и никакие другие. Сколько плиток в наборе?

Ответ: 28 плиток. **Решение.** $22 = 11 \cdot 2$; $32 = 16 \cdot 2$; $58 = 29 \cdot 2$. У всех этих прямоугольников одинаковая площадь, равная количеству плиток. Среди них обязательно есть прямоугольник шириной в одну плитку. Тогда его длина может быть 10, 15 или 28. Но из 10 или 15 плиток мы не можем сложить прямоугольник с периметром 58. А вот из 28 плиток можем сложить прямоугольники 14×2 и 7×4 с нужными нам периметрами и никакие больше, так как $28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$. Значит, в наборе было 28 плиток.

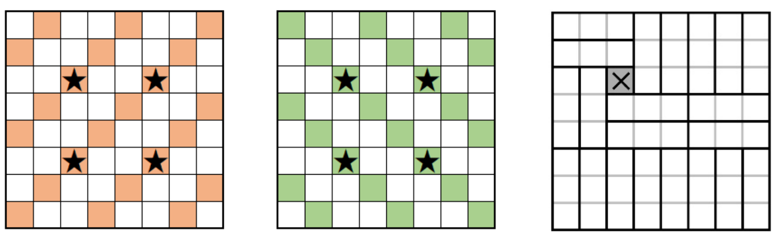
Задача 7. На рисунке можно найти несколько треугольников. Добавьте один отрезок так, чтобы треугольников стало ровно на 8 больше. Посчитайте, сколько треугольников было, сколько всего треугольников стало после проведения линии?



Ответ: было 10 треугольников, стало 18 треугольников. **Нужный отрезок изображён на рисунке.**

Задача 8. Доску 8×8 клеток разрезали на прямоугольники 1×3 так, что осталась одна клетка. Что за клетка это могла быть?

Комментарий: нарисуйте доску 8×8 и изобразите ответ на ней.



Решение. Если раскрасить поле, как показано на рисунке, то можно заметить, что прямоугольник 1×3 всегда занимает 2 белых и одну цветную клетку. Белых клеток – 42, цветных – 22. Значит, останется одна цветная. Могли остаться только те клетки, которые являются цветными на обеих раскрашенных досках. Это те, которые помечены звёздочкой. **Пример разрезания изображён на рисунке справа.**

Санкт-Петербургская
математическая олимпиада 2022

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЫ

Решения задач

4 класс

Задача 1. Аркадий написал на доске в строчку три числа. Их сумма оказалась равна 300. А ещё оказалось, что если вычесть из первого числа второе, то получится третье число. Чему равно первое число?

Ответ: 150. **Решение.** Сумма второго и третьего чисел равна первому числу, поэтому сумма всех трёх чисел равна удвоенному первому числу. Отсюда находим, что первое число равно 150.

Задача 2. Ровно в полдень Виктор Геннадьевич и Геннадий Викторович, заметив друг друга на улице, сразу побежали в противоположные стороны. В 12:20 они вспомнили, что на самом деле дружат, и, не меняя своих скоростей, побежали навстречу друг другу. Они встретились в 12:45. Во сколько раз расстояние между ними в 12:20 было больше расстояния между ними в 12:00?

Ответ: в 5 раз. **Решение.** Когда они бежали навстречу друг другу, то 20 минут ушло на то, чтобы вернуться на свои исходные позиции. После этого им хватило 5 минут, чтобы добежать друг до друга. Это означает, что когда они убегали друг от друга, они пробежали расстояние в четыре раза большее, чем было между ними в начале. Значит, всего расстояние между ними стало в пять раз больше.

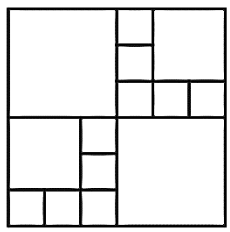
Задача 3. Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 7 и сумма цифр которого равна 2.

Ответ: 1001. **Решение.** Натуральные числа с суммой цифр 2 делятся на два типа. Первый тип – это числа, начинающиеся на 2, а дальше в записи только нули. Но ни одно такое число не делится на 7. Второй тип – это числа, которые начинаются с единицы, а дальше в записи где-то использована ещё одна единица, а остальные цифры нули. Такие числа можно просто перебрать в порядке возрастания, пока не найдём делящееся на 7: 11 не подходит, 101 не подходит, 110 не подходит, 1001 подходит.

Задача 4. Расставьте целые числа от 1 до 10 в строчку так, чтобы для любых трёх соседних чисел большее из них было больше суммы двух остальных.

Пример: 10, 6, 2, 9, 3, 4, 8, 1, 5, 7. **Замечание.** Есть разные способы. Логика построения приведённого выше примера такова, что большие числа (10, 9, 8, 7) нужно ставить на расстоянии в 2 числа друг от друга.

Задача 5. Разрежьте квадрат на 2 больших одинаковых квадрата, 2 средних одинаковых квадрата и 10 маленьких одинаковых квадратов так, чтобы большие квадраты не имели общей стороны и средние квадраты не имели общей стороны.



Пример изображён на рисунке. Решение. Разделим мысленно квадрат на четыре одинаковых квадрата. В качестве больших квадратов возьмём два противоположных. Теперь два других противоположных квадрата мысленно разделим на 9 маленьких квадратов каждый. Объединим четыре маленьких квадрата в один средний дважды. Получится пример требуемого разрезания.

Задача 6. 14 учеников решили устроить между собой на переменке турнир по игре «камень-ножницы-бумага». Каждый участник должен был сыграть с каждым ровно два раза. В самый разгар турнира прозвенел звонок на урок, и турнир пришлось закончить. Оказалось, что любые два участника либо не успели сыграть между собой ни разу, либо сыграли ровно один раз. Только Гоша и Валя успели сыграть между собой два раза. Могло ли быть так, что все ученики сыграли разное количество игр, если каждый успел сыграть хоть раз?

Ответ: не могло. **Решение.** Пусть они все сыграли разное количество игр. Посмотрим, сколько игр мог сыграть участник турнира. Минимум – 1 игра. Максимум – 14 игр, так как этот участник сыграл максимум по одной игре с остальными тринадцатью, плюс ещё одна игра, если это Гоша или Валя. Итого, 14 вариантов. Но и игроков тоже 14. Значит, каждый вариант реализуется ровно один раз. Тогда общее количество сыгранных игр можно вычислить так: $(1 + 2 + \cdots + 14) : 2 = 52{,}5$, это нецелое число. Противоречие.

Задача 7. На столе лежат 12 красных, 22 зелёных, 32 синих и 42 жёлтых конфеты. Санта-Клаус упаковывает подарки: он берёт три разноцветные конфеты и кладёт их в отдельный чулок. Какое наибольшее количество чулков удастся Санта-Клаусу заполнить имеющимися у него конфетами?

Ответ: 33 чулка. **Оценка.** На столе имеется 66 конфет не жёлтого цвета. В каждый подарок входят как минимум две не жёлтые конфеты. Значит, подарков получится не больше чем $66 : 2 = 33$. **Пример.** Теперь опишем, как можно получить 33 подарка. Например, можно взять по 21 зелёной, синей и жёлтой конфете. Затем по 11 красных, синих и жёлтых конфет. И наконец, 1 подарок из красной, зелёной и жёлтой конфет.

Задача 8. Аркадий записал на доске три натуральных числа. Он заметил, что если сложить любые два из них, то получившаяся сумма заканчивается на ту же цифру, что и третье число. Аркадий перемножил три своих числа. Предпредпоследняя цифра произведения оказалась равна 7. Чему равна предпоследняя цифра произведения?

Ответ: 5. **Решение.** Рассмотрим три числа, каждое из которых получено как сумма каких-то двух чисел Аркадия минус третье число. Из условия задачи видно, что эти числа заканчиваются на 0. Значит, их сумма заканчивается на 0. Но их сумма равна просто сумме чисел Аркадия. Значит, сумма чисел, записанных Аркадием, заканчивается на 0. Но раз сумма первых двух плюс третье заканчивается на 0 и сумма первых двух минус третье заканчивается на 0, то и их разность, равная удвоенному третьему, тоже заканчивается на 0. Тогда третье (аналогично, и первое, и второе) заканчивается либо на 0, либо на 5.

Будем дальше рассматривать варианты.

- Пусть все три числа заканчиваются на 0. Тогда их произведение заканчивается на три нуля, нам этот вариант не годится.
- Пусть все три числа заканчиваются на 5. Тогда сумма любых двух заканчивается на 0, а не на 5, вариант не подходит.
- Пусть одно число заканчивается на 5, а два других на 0, тоже видно, что этот вариант не подходит.

Значит, два числа заканчиваются на 5, а одно на 0. Давайте временно домножим первые два числа на 2, тогда они тоже будут заканчиваться на 0. Значит, их произведение будет заканчиваться на три нуля. Поделим обратно на 4. Последние три цифры могут получиться только такими: 000, 250, 500 или 750. Зная, что третья цифра с конца равна 7, находим ответ: 5.