VIII Санкт-Петербургская математическая олимпиада 2021-2022 учебный год

1 класс

Решения задач отборочного тура

Задача 1. В домик Кролика нужно подниматься по лестнице. Когда кролик весел, он поднимается, прыгая через одну ступеньку. Сегодня Кролик весел. Он добрался до двери домика в три полных прыжка. Сколько ступеней ведут к дому Кролика?

Решение. Через 3 ступени Кролик перепрыгнул и на 3 наступил: $3 + 3 = 6$.

6

Задача 2. У Луки есть несколько котов, чижей и рыб. Всего у животных 20 глаз, столько же ног и несколько хвостов. Сколько животных у Луки?

10

Решение. У всех представленных животных есть по паре глаз, то есть всего животных $20 : 2 = 10$.

Задача 3. На рисунке изображены выключенные часы, и показано как выглядят цифры, когда часы показывают время. Однажды Вася заметил, что светится 20 палочек. Произошло короткое замыкание, и светящиеся палочки потухли, а те, что до этого не светились – загорелись. Сколько палочек теперь светится?

Решение. Если бы светились все палочки, то светящихся палочек было бы 28. А светилось 20. Значит, не светилось 8. Они и стали светиться после короткого замыкания.

8

Задача 4. В корзине есть несколько яблок. Если в неё добавить три яблока, то будет половина корзины, а если восемь яблок, то корзина станет полной. Сколько яблок в корзине?

Решение. Разница между полной корзиной и половиной корзины равна $8 - 3 = 5$. Значит, 5 яблок – это половина корзины. А 10 – это полная корзина. И в корзине было $10 - 8 = 2$ яблока.

2

Задача 5. У бабушки Гали есть две собаки и две кошки, две злые и две добрые. Их зовут: Кун, Куся, Муся и Мао. Известно, что имена одинаковых животных начинаются с одной буквы, а имена добрых животных отличаются одной буквой. Куся – добрая кошка. Как зовут злую собаку?

Решение. Найдём добрую собаку, она отличается одной буквой от Куси. Это Муся. Злая собака – на ту же букву, что и добрая – это Мао.

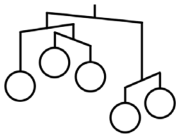
Мао

Задача 6. Антон, Вася и Соня придумывали задачи к олимпиаде. Они придумали 1, 3 и 6 задач, но кто сколько – не помнят. Антон сказал: «Вася придумал меньше Сони». Вася сказал: «Неправда, что я придумал меньше всех». Соня сказала: «Вы оба правы». Кто придумал три задачи, если Соня никогда не ошибается?

Решение. Вася придумал меньше Сони, поэтому Вася придумал либо 1, либо 3 задачи. Но Вася придумал не меньше остальных, значит не 1. Таким образом, Вася придумал 3 задачи.

Вася

Задача 7. Есть гири весом 1, 2, 3, 4, 5 кг и чашечные весы. Вставьте в кружочки цифры от 1 до 5 так, чтобы весы находились в том положении, которое изображено на картинке. Все весы не в равновесии. Вниз опускается та часть весов, вес которой больше. Цифры обозначают вес. В ответ запишите последовательность висящих гирек слева направо.



Решение. Посмотрим на самые верхние весы. Две гири справа перевешивают три левых гири. Значит справа могут быть (4 и 5) или (3 и 5). Первый вариант невозможен, так как тогда слева будут гири 1, 2, 3, но никакая из них не перевесит две других. А вот второй подойдёт: $1 + 2 + 4 < 3 + 5$ и $4 > 1 + 2$. Значит слева направо гири располагались так: 4, 1, 2, 5, 3.

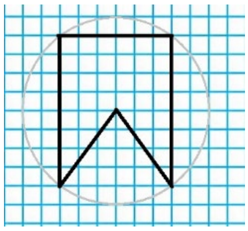
4, 1, 2, 5, 3

Задача 8. Математик печёт блины и выкладывает их в стопку по определённому закону: когда блин испекается, то кладётся на вершину стопки, далее вся стопка переворачивается. Каким по счёту сверху в получившейся стопке будет первый испечённый блин, если математик увлёкся и испёк 36 блинов?

Решение. Блины выстроятся следующим порядком: сначала все нечётные (35, 33, 31, 29, 27, …, 1), далее чётные по возрастанию (2, 4, 6, 8, …, 36). Первый испечённый блин будет 18 сверху, так как в ряду от 1 до 36 ровно по 18 чётных и нечётных чисел.

18

Задача 9. Вася нарисовал на клетчатом листе кружок, а потом провёл черную линию внутри этого круга, как показано на рисунке. Сколько клеточек составляет длина чёрной линии?



Решение. Вертикальные и горизонтальные линии идут по линиям и их длина равна $8 + 6 + 8 = 22$ клетки. Линии, идущие не по линиям сетки, идут из центра круга до его границы. Заметим, что это расстояние равно 5 клеткам. Так что длина этих линий $5 + 5 = 10$ клеток. Значит, длина всей кривой – 32 клетки.

32

Задача 10. Вчера мальчик Петя играл с кубиками, и из всех кубиков, что у него были, построил один большой кубик. А сегодня мальчик из тех же кубиков, что у него были, построил плоский квадрат (то есть высотой в 1 кубик). Какое число кубиков могло быть у Пети, если их меньше 100?

Решение. Давайте посчитаем, сколько кубиков потребуется, чтобы составить все возможные квадраты (см. справа, второй столбец), и сколько их нужно на кубы (третий столбец). Видим, что единственное совпадающее число – 64.

64

Сторона	Квадрат	Куб
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	**64**
5	25	125
6	36	
7	49	
8	**64**	
9	81	
10	100	

VIII Санкт-Петербургская математическая олимпиада
2021-2022 учебный год

2 класс

Решения задач отборочного тура

Задача 1. У Бубы было 4 карточки с цифрами 2, 0, 2, 1. Он их разложил на столе в ряд, но перепутал и получился ближайший год, следующий за 2021-м, номер которого можно сложить из этих карточек. Какой год получился у Бубы?

2102

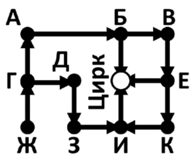
Решение. Оставим на своём месте карточку $2***$, поскольку её не заменить на большую. Если 0 тоже оставить на своём месте, то можно получить только 2012, а это меньше 2021. Значит, 0 придётся поменять. Ставим вместо него 1, чтобы найти ближайший год: $21**$. Оставшиеся две карточки дают наименьшее число 2102.

Задача 2. Дровосеки Тедди и Фредди срубили 10 елей. У Тедди из каждой ели получилось 2 бревна, а у Фредди из каждой ели получилось 3 бревна. Всего получилось 23 бревна. Сколько елей срубил Тедди?

7 ёлок

Решение. Если бы все ели срубил Тедди, то получилось бы $2 \times 10 = 20$ брёвен, а их на $23 - 20 = 3$ больше. Это вышло из-за Фредди, который с каждой ели получил на одно бревно больше, значит он срубил 3 ели, а Тедди $10 - 3 = 7$.

Задача 3. Фунтик едет в Цирк, ему нужно сесть на автобус и выйти на четвертой остановке. Автобусы ходят по направлениям стрелок, а черные кружочки – это остановки. От какой остановки может ехать Фунтик? Найдите все варианты.



А, В, Г, Ж

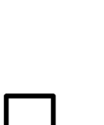
Решение. Достаточно перечислить подходящие маршруты: А → Б → В → Е → Ц, Г → Д → З → И → Ц, Ж → Г → А → Б → Ц, В → Е → К → И → Ц.

Задача 4. В семье Ивановых трое сыновей. Один старше другого на 1 год, у двоих разность возрастов – 2 года, и у двоих разность возрастов – 3 года. Фёдор не старше Егора и не младше Ивана. Сколько лет может быть Фёдору, если Егору 8 лет? Найдите все варианты.

6 или 7

Решение. Упорядочим по старшинству: Егор, Фёдор, Иван. Тогда у Егора и Ивана самая большая разница в 3 года. А у Егора с Фёдором разница 1 или 2 года, значит, Фёдору 6 или 7 лет.

Задача 5. У Тараса есть матрасы в форме трёхклеточных уголков, таких, как на рисунке. Он хочет застелить ими квадратную кровать без дырок и без наложений. Какое наименьшее количество матрасов ему понадобится?



12

Решение. $12 \cdot 3 = 36$, это квадрат 6×6 клеток. Меньше нельзя, поскольку общее количество клеток в квадрате должно делиться на 3. А это выполняется для квадрата, меньшего 6×6, только у квадрата 3×3. Но для него не выполнить такого заполнения уголками.

Задача 6. На игральном кубике выпало какое-то число от 1 до 6. Пять роботов записали это число на пять листов бумаги. Каждый отдал свой лист Лживому Роботу, который всегда говорит неправду. Он сказал: «На этом листе число 5. На этом – 2. Вот 1. Ещё 4. И, наконец, 3. Какой-то из пяти роботов неисправен!» Какие числа могли выпасть на кубике?

6

Решение. Поскольку Лживый Робот – лжец, то все роботы исправны и не выпало ни одно из перечисленных значений. Остаётся только 6.

Задача 7. Четыре шахматиста сыграли каждый с каждым по одному разу. Герман получил 2 очка, Фёдор – 4 очка, Игнат – 5 очков. А сколько очков получил Антон?

Примечание. За победу даётся 2 очка, за ничью – 1, за поражение – 0.

1

Решение. Всего у четырёх шахматистов было 6 партий. 6 партий позволили им получить 12 очков, поскольку в каждой партии распределяются 2 очка. 11 очков получили остальные, значит, у Антона 1 очко.

Задача 8. Катя склеила из маленьких кубиков большой куб $2 \times 2 \times 2$, а Маша – $3 \times 3 \times 3$. Катя может покрасить свой куб за 20 секунд, а Маша – за 45 секунд. За какое время они вместе покрасят куб размером $4 \times 4 \times 4$? Каждая девочка красит всегда с одинаковой скоростью, у каждого большого куба нужно покрасить все грани.

40 секунд

Решение. Кате нужно покрасить $(2 \cdot 2) \cdot 6 = 24$ квадратика, а Маше – $(3 \cdot 3) \cdot 6 = 54$ квадратика. Катя каждые 6 квадратиков красит за $20 : 4 = 5$ секунд. Маша каждые 6 квадратиков красит тоже за $45 : 9 = 5$ секунд. Вся поверхность башни $4 \times 4 \times 4$ – это $(4 \cdot 4) \cdot 6 = 96$ квадратов. Каждые 5 секунд девочки красят вдвоём 12 квадратиков, им нужно повторить это 8 раз, поскольку $12 \cdot 8 = 96$. Значит, на покраску потребуется $5 \cdot 8 = 40$ секунд.

Задача 9. Вокруг озера идёт дорожка длиной 100 м, а вдоль неё растут ёлки с номерами 1, 2, 3, 4. Волк шёл по кругу: от первой ёлки он прошёл до второй 15 м, от второй до третьей – 20 м, и от третьей до четвёртой – 45 м. А заяц начал маршрут от первой ёлки и у каждой ёлки побывал хотя бы один раз. Всего заяц пробежал 75 м. Запишите номера ёлок в том порядке, в каком у них побывал заяц.

1 → 4 → 1 → 2 → 3

Решение. До 4-й ёлки от 1-й – 20 м, если скакать в обратную сторону, до 3-й от 1-й – аналогично 65 м. Значит, он мог скакать до 3-й только с той стороны, где до неё 35 м, иначе он превысит общую длину пути. Оставшиеся $75 - 35 = 40$ м получаются из-за того, что он доскакал до 4-й ёлки и обратно к 1-й.

Задача 10. У Шарика и Матроскина вместе 17 монет достоинством 2 и 5 рублей каждая. Оказалось, что денег у них поровну. Какое наибольшее количество денег у них может быть вместе?

70 рублей

Решение. Всего монет 17, поэтому поровну их не разделить. Чтобы суммы из разного количества монет были равны, надо «уравновесить» две монеты по 5 р. пятью монетами по 2 р. – это хотя бы 7 монет. Тогда остальные 10 монет – попарно любые. Наибольшее значение достигается, когда все остальные монеты по 5 р.: $20 + 50 = 70$ р.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЫ

VIII Санкт-Петербургская математическая олимпиада 2021-2022 учебный год

3 класс

Решения задач отборочного тура

Задача 1. В 2021 году отец подарил сыну книгу, которую издали, когда ему самому было 10 лет. Отец родился в 1977 году. Сколько книге лет в 2021?

Решение. Отец купил книгу в $1977 + 10 = 1987$ году. Сейчас 2021 год. Книге $2021 - 1987 = 34$ года.

34 года

Задача 2. Мама вырезала из картона для доклада буквы английского слова CHART. Лука не знает английского, поэтому сложил из всех этих букв имя своей мамы по-русски. Как зовут маму Луки?

Решение. Буквы из картона, поэтому они переворачиваются, R становится Я. Можно собрать имя Настя.

НАСТЯ

Задача 3. Петя, Миша, Таня и Вова случайно уронили настенные часы и из часов выпали стрелки. Петя сказал: «Ровно перед тем, как часы упали, минутная стрелка смотрела строго вправо», Миша сказал: «Часовая стрелка находилась рядом с нечётным числом», Таня сказала: «Было больше шести, но меньше десяти часов», Вова сказал: «Мы вернулись из школы в два часа, и с тех пор прошло не более шести часов». Какое время было на часах в момент падения, если все они сказали чистую правду?

Решение. Минутная стрелка показывала ровно вправо, значит, 15 минут. «Вернулись из школы в 14 часов и были дома не более 6 часов», то есть время в момент падения не больше 20:00 (ровно 6 часов после прихода домой). «Было больше 6 часов, но меньше 10», значит, время было с 18 до 20 часов. «Стрелка часов была рядом с нечётным числом», то есть рядом с 7. Время падения: 19:15.

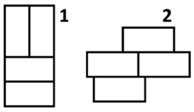
19:15

Задача 4. Весной бабушка купила в магазине «Весёлый Огородник» клубни картофеля двух сортов: по 20 и по 50 руб. за штуку. Из каждого клубня по 20 рублей осенью получалось 5 клубней. Из каждого клубня по 50 рублей осенью получалось 8 клубней. Все купленные клубни бабушка посадили в огороде и осенью выкопала ровно 100 новых клубней картофеля. Сколько бабушка заплатила за свою покупку весной, если у неё было всего 500 рублей?

Решение. Пусть x – количество клубней за 20 рублей, y – за 50. Тогда $5x + 8y = 100$. Первое слагаемое и сумма кратны 5. Значит, и второе слагаемое должно делиться на 5. Условию удовлетворяют только $y = 5$ и $y = 10$ ($y = 0$ быть не может, так как бабушка купила клубни двух сортов, а $y = 15$ и больше быть не может, так как клубней всего 100). При $y = 5$, $x = 12$. Потрачено $5 \cdot 50 + 12 \cdot 20 = 490$ рублей. При $y = 10$, $x = 4$ потрачено $10 \cdot 50 + 4 \cdot 20 = 580$ рублей. Денег было всего 500 рублей. Значит бабушка потратила 490.

490 рублей

Задача 5. Фигуры 1 и 2 сложены из четырёх одинаковых прямоугольников. Периметр фигуры 1 равен 12. Чему равен периметр фигуры 2?



Примечание. Периметр фигуры – это длина её внешней границы.

Решение. Из рисунка видно, что длинная сторона прямоугольника в два раза больше короткой. Периметр первого четырёхугольника – 12 коротких. Второго – 14 коротких.

14

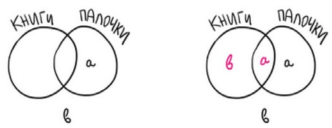
Задача 6. Если электронные часы перевернуть вверх ногами, то в 11 часов 11 минут они будут показывать правильное время. Сколько раз в сутки перевёрнутые электронные часы показывают правильное время?

Ответ. 11:11, 22:22, 00:00, 01:10, 10:01, 20:02, 02:20, 12:21, 21:12, 05:50, 15:51.

11 раз

Задача 7. Чтобы сотворить заклинание, нужно иметь книгу заклинаний и волшебную палочку. У всех волшебников, кроме пяти, есть книга заклинаний, даже если у них нет волшебной палочки. Из тех волшебников, что имеют волшебную палочку, у половины нет книги заклинаний. Имеющих книгу заклинаний столько же, сколько и не имеющих. Сколько волшебников может сотворить заклинание, если волшебной палочки нет у шести из них?

Решение. Обозначим за А волшебников, которые имеют только палочки, а за В – тех, кто не имеет вообще ничего. Из имеющих палочку половина не имеет книгу (это А), половина имеет (значит это тоже А). Имеющих книгу столько же, сколько не имеющих. Не имеющих А + В, значит, имеющих тоже должно быть А + В. Значит, нет палочки у 2В. 2В = 6, значит В = 3. Значит А = 5 − 3 = 2.



2

Задача 8. В вазе лежали манго, сливы, груши, персики, яблоки, абрикосы и киви. Каждый гость взял себе некоторое количество фруктов, но не более одного фрукта каждого вида. Оказалось, что у всех гостей наборы фруктов получились разные, но у каждых двух из них есть хотя бы по одному одинаковому фрукту. Какое максимальное количество гостей могло быть?

Решение. Всего различных наборов из 7 фруктов, включая пустой – 128 (2 в 7 степени). Разобьём их на пары так, что пара даёт полный набор фруктов, то есть к любому набору фруктов берём его дополнение до полного. Таких пар 64. Если мы возьмём 65 разных наборов, то найдутся два из них, входящих в одну пару. Другими словами, найдётся два человека, наборы которых не пересекаются. Значит максимальное количество гостей 64. Покажем, что можно раздать 64 гостям наборы фруктов, удовлетворяющие условию задачи. Пусть каждый из гостей взял манго. Тогда из 6 оставшихся фруктов можно составить 64 разных набора (включая пустой). Раздадим их 64 гостям. Все наборы разные, у любых двух гостей есть общий фрукт.

64

Задача 9. Анастасия, Ольга и Ирина придумывают задачи с разной, но постоянной скоростью. Кто придумал 50 задач, тот идёт отдыхать. Когда Ирина пошла отдыхать, Ольга придумала всего 40. А когда Ольга пошла отдыхать, Анастасия придумала всего 40. Сколько задач придумала Анастасия в момент, когда пошла отдыхать Ирина?

Решение. Анастасия придумала 40 задач к тому моменту, когда Ольга придумала 50. Значит, пока Ольга придумывает 10 задач, Анастасия придумывает 8. И ровно 10 задач Ольга придумала с того момента, как Ирина пошла отдыхать. Значит, с тех пор Анастасия придумала 8 задач, и у неё их стало 40. Значит, когда Ирина пошла отдыхать, у Анастасии было придумано 32 задачи.

32

Задача 10. Тотальный диктант написали 104 человека. Они получили за него оценки от 1 до 5. После диктанта они встали в круг, и оказалось, что оценки любых двух стоящих рядом людей отличаются на 1. Известно, что среди них ровно 32 человека получили «5», а 17 человек – «1». Сколько человек могли получили «3»?

Решение. Так как оценки любых двух стоящих рядом людей отличаются на единицу, то чётные и нечётные оценки чередуются. И их равное количество, то есть по $52 = 104 : 2$. Пятерок и единиц в сумме 49, значит троек $52 - 49 = 3$.

3

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЫ

VIII Санкт-Петербургская математическая олимпиада 2021-2022 учебный год

4 класс

Решения задач отборочного тура

Задача 1. В волшебном лесу жили двадцать фей-близняшек. На их общий День рождения гномы подарили восьми феям по цветку, а эльфы подарили десяти феям по яблоку. В итоге пять фей, увы, остались без подарка. Сколько фей получили в подарок и цветок, и яблоко?

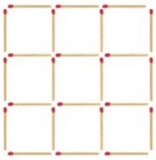
Решение. $20 - 5 = 15$ – столько фей получили хотя бы один подарок. $8 + 10 - 15 = 3$ – столько фей получили ровно два подарка.

$\boxed{3}$

Задача 2. Сколько есть различных способов разбить числа от 1 до 30 на пары так, чтобы в каждой паре сумма чисел была чётная?

Решение. Нечётное число может быть в паре только с нечётным числом, чтобы сумма получилась чётной. Но от 1 до 30 есть нечётное количество нечётных чисел, потому их нельзя разбить на пары.

$\boxed{0}$



Задача 3. Аркадий сложил из спичек квадрат, почти такой же, как на рисунке, только размерами не 3×3, а 300×300. Сколько спичек использовал Аркадий?

Решение. $2 \cdot 300 \cdot 301 = 180600$. В каждом горизонтальной линии 300 спичек, а самих горизонтальных линий 301. Итого, в них $300 \cdot 301$ спичек. Столько же вертикальных спичек.

$\boxed{180600}$

Задача 4. В ряд стоят четыре ящика, в каждом лежит некоторое (ненулевое) количество дынь. Причём, чем правее ящик, тем больше в нем дынь. В последнем ящике дынь на 5 больше, чем в первом. Общее количество дынь равно 20. Сколько дынь во втором ящике? Укажите все возможные варианты.

Решение. В 1-м ящике не более 3 дынь (пусть там как минимум 4 дыни, тогда во 2-м – как минимум 5, в 3-м – как минимум 6, в 4-м – как минимум 9, итого как минимум 24, противоречие). Пусть в 1-м ящике 3 дыни, тогда в 4-м – 8. Тогда во 2-м и 3-м вместе 9. Этого можно добиться, только если во 2-м ящике 4, а в 3-м – 5 дынь. Пусть в 1-м ящике 2 дыни, тогда в 4-м – 7. Тогда во 2-м и 3-м вместе 11. Этого можно добиться, только если во 2-м ящике 5, а в 3-м – 6 дынь. Пусть в 1-м ящике 1 дыня, тогда в 4-м – 6. Тогда во 2-м и 3-м вместе 13. Этого нельзя добиться.

$\boxed{4 \text{ или } 5}$

Задача 5. Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 9, в записи которого использованы только чётные цифры.

Решение. Однозначное число 9 не подходит. Двузначные числа, делящиеся на 9, тоже не подходят, так как сумма их цифр равна 9 (значит, одна из них нечётная) или 18 (такое число одно, 99, оно не подходит). Трёхзначные числа, начинающиеся на цифру 1, не подходят. Попробуем найти число, начинающееся на цифру 2. Остальные две цифры должны давать в сумме либо 7 (тогда одна из них нечётная), либо 16 (это либо 8 и 8, либо 7 и 9).

$\boxed{288}$

Задача 6. На игральный кубик наносят точки так, чтобы на любых двух его противоположных сторонах было в сумме ровно семь точек. Аркадию подарили 27 одинаковых кубиков (один из них вы можете видеть на рисунке). Он составил из них на непрозрачном столе куб $3 \times 3 \times 3$ и стал считать количество тех точек, которые видны, то есть расположены на видимых сторонах большого куба. Какое наименьшее количество точек мог насчитать Аркадий?

Решение. Напротив грани с 6 точек грань с 1 точкой, то есть, грани с 1, 2 и 3 точками все друг другу смежны. Все кубики, у которых видна одна грань, могут показывать 1 точку. Таких кубиков 9: 4 в нижнем этаже и 5 в центрах сторон. Все кубики, у которых видны две грани, могут показывать $1 + 2 = 3$ точки. Таких кубиков 12: по 2 на 4 боковых ребрах и 4 на верхних ребрах. Все кубики, у которых видны три грани, могут показывать $1 + 2 + 3 = 6$ точек. Таких кубиков 4: это верхние угловые кубики. В итоге, видно $9 \cdot 1 + 12 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = 69$ точек.

$\boxed{69}$

Задача 7. Сумма цифр четырёхзначного числа n равна 20. Какая самая маленькая сумма цифр может быть у числа $n + 2$?

Решение. Пример такого числа n: 1199, тогда $n + 2$ равно 1201. Если число n заканчивается не на 8 и не на 9, то сумма цифр при прибавлении числа 2 увеличивается на 2. Если число заканчивается на p девяток, то при прибавлении числа 2 его сумма изменяется на $2 - 9p$, то есть, может принимать значения 13 или 4. Если число заканчивается на p девяток (где p может быть равно 0) и одну восьмерку, то легко убедиться, что сумма так же изменяется на $2 - 9p$.

$\boxed{4}$

Задача 8. На Марсе живут 63 марсианина, одни из них – красные, другие – зелёные. Однажды они решили высадить яблоневый сад. Каждый красный марсианин посадил по 5 яблонь, а каждый зелёный – по 6. Скоро яблони зацвели, и на каждой из них выросло по 10 яблок. Вышло так, что урожай собирали только зелёные марсиане, и каждому из них досталось ровно по 100 яблок. Сколько на Марсе красных марсиан?

Решение. Пусть красных марсиан k, зелёных – z. Тогда яблонь $5k + 6z$, а яблок выросло $50k + 60z$. С другой стороны, количество яблок равно $100z$. Получается, что $5k = 4z$. Откуда вместе с тем условием, что $k + z = 63$, получаем, что $k = 28$.

$\boxed{28}$

Задача 9. В корзине лежит 100 грибов: моховики, подберёзовики, лисички и сыроежки. Если взять наугад любые 90 грибов, то среди них обязательно найдутся все четыре вида. Сколько грибов нужно взять из корзины наугад, чтобы среди них обязательно нашлись хотя бы три различных вида грибов?

Решение. Докажем, что нужно взять больше, чем 78 грибов. Пусть мы взяли 78 грибов в ситуации, когда в корзине 11 боровиков, 11 подосиновиков, 11 подберёзовиков и 67 сыроежек (эта ситуация подходит под условие). Могло оказаться так, что мы взяли все подберёзовики и все сыроежки, то есть менее чем три вида грибов. Докажем, что 79 грибов всегда хватит. Грибов каждого вида не менее 11 (пусть, например, сыроежек не более 10, тогда можно взять таких 90 грибов, что среди них не будет ни одной сыроежки). Значит, грибов любых двух видов не менее 22, а значит, и не более чем $100 - 22 = 78$. Следовательно, если вы возьмем наугад 79 грибов, там точно будут как минимум три вида грибов.

$\boxed{79}$

Задача 10. Для каждого трёхзначного числа, в записи которого не используется цифра 0, Аркадий вычислил сумму наименьшей и наибольшей его цифры. Все полученные суммы Аркадий сложил. Сколько у него получилось?

Решение. Все $9^3 = 729$ таких трёхзначных чисел (кроме числа 555) разбиваются на пары по принципу: abc – $(10 - a)(10 - b)(10 - c)$. В каждой такой паре сумма четырёх цифр, вычисленная Аркадием, равна 20. Для числа 555 сумма двух цифр равна 10. Поэтому ответ равен $20 \cdot 728 : 2 + 10 = 7290$.

$\boxed{7290}$